

EQUATIONS – ORDRE ET OPERATIONS

1) Notion d'équation

Une équation est une égalité contenant une inconnue souvent notée x . Résoudre une équation, c'est déterminer toutes les valeurs de x vérifiant l'égalité.

Exemple

$15x + 3 = 10x + 5$ est une équation dont l'inconnue est x . Résoudre cette équation, c'est déterminer les valeurs de x telle que $15x + 3 = 10x + 5$.

2) Résolution d'équation

Règle 1

On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité :

Considérons trois nombres relatifs a, b, c .

Si $a = b$, alors $a + c = b + c$.

Si $a = b$, alors $a - c = b - c$.

Règle 2

On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une d'égalité par un même nombre :

Considérons trois nombres relatifs a, b, c .

Si $a = b$, alors $a \times c = b \times c$.

Si $a = b$ et si $c \neq 0$, alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Une méthode de résolution

- y a-t-il des termes où figurent la lettre x dans le membre de droite ? Si oui, effectuer les opérations nécessaires pour qu'il n'y en ait plus ;
- isoler le terme où figure la lettre x dans le membre de gauche ;
- conclure

Exemple

Reprenons l'exemple $15x + 3 = 10x + 5$:

La première étape consiste à se "débarrasser" du terme $10x$ dans le membre de droite. Pour cela, on soustrait $10x$ à chaque membre (règle 1) :

$$15x + 3 - 10x = 10x + 5 - 10x$$

Après simplification, on obtient :

$$5x + 3 = 5$$

La deuxième étape consiste à isoler le terme $5x$ dans le membre de gauche . Pour cela, on soustrait 3 à chaque membre (règle 1) :

$$5x + 3 - 3 = 5 - 3$$

Après simplification, on obtient :

$$5x = 2$$

On cherche donc un nombre qui multiplié par 5 donne 2. Ce nombre est $\frac{2}{5}$.

L'équation $15x + 3 = 10x + 5$ a pour solution $\frac{2}{5}$.

On peut vérifier en remplaçant x par $\frac{2}{5}$ dans le membre de gauche, puis dans le membre de droite :

$$15 \times \frac{2}{5} + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$10 \times \frac{2}{5} + 5 = 4 + 5 = 9$$

$\frac{2}{5}$ est donc solution de l'équation de départ.

3) Exemple de résolution d'un problème par une équation

Énoncé : La somme d'un entier son suivant est 155. Quel est cet entier ?

étape n°1 : choix de l'inconnue et contraintes

On appelle x l'entier cherché. On a nécessairement $x < 155$ et x est un nombre sans virgule.

étape 2 : mise en équation du problème

L'entier suivant x est $x + 1$.

Traduction de l'énoncé : $x + (x + 1) = 155$

étape 3 : résolution de l'équation

$$x + x + 1 = 155$$

$$2x + 1 = 155$$

$$2x = 154 \quad (\text{on soustrait 1 à chaque membre de l'égalité})$$

$$x = \frac{154}{2} \quad (\text{on divise chaque membre par 2})$$

$$x = 77$$

étape 4 : réponse au problème posé

L'entier cherché est 77.

étape 5 (au brouillon)

l'entier suivant 77 est 78 et on a bien $77 + 78 = 155$. (on vérifie le résultat)

4) Comparer deux nombres

a – inégalité et signe d'une différence

propriété 1

a et b désignent des nombres relatifs ou des variables.

- dire que $a < b$ revient à dire que $a - b < 0$;
- dire que $a = b$ revient à dire que $a - b = 0$;
- dire que $a > b$ revient à dire que $a - b > 0$.

exemples

Dire que $x < 3$ revient à dire que $x - 3 < 0$.

Dire que $x = 5$ revient à dire que $x - 5 = 0$.

Dire que $x > -2$ revient à dire que $x + 2 > 0$.

b – comparaison de deux quotients

propriété 2

On considère deux nombres écrits sous forme fractionnaire.

- si ces deux nombres ont le même dénominateur, le plus petit est celui qui a le plus petit numérateur ;
- si ces deux nombres ont des dénominateurs différents, on commence par les réduire au même dénominateur pour les comparer.

exemples

Comparer $\frac{7}{5}$ et $\frac{22}{15}$

$$\frac{7}{5} = \frac{7 \times 3}{5 \times 3} = \frac{21}{15} \quad \text{donc} \quad \frac{7}{5} < \frac{22}{15}.$$

5) Addition et ordre

propriété 3

a , b , et c désignent des nombres relatifs ou des variables. $a + c$ et $b + c$ sont rangés dans le même ordre que a et b . Autrement dit, ajouter un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

exemples

si x vérifie $x > -2$, alors :

$$x + 5 > -2 + 5$$

$$x + 5 > 3$$

si $x - 7 > 2$, alors :

$$x - 7 + 7 > 2 + 7$$

$$x > 9$$

6) Multiplication et ordre

propriété 4

a , b et c désignent des nombres relatifs ou des variables. ab et ac sont rangés dans le même ordre que b et c si a est positif. Autrement dit, multiplier chaque membre d'une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité.

exemples

x est un nombre tel que $x > 5$

$$2 \times x > 2 \times 5$$

$$2x > 10$$

x est un nombre tel que $3x < -2$

$$\frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times (-2)$$

$$x < -\frac{2}{3}$$

Remarque : la condition " a positif" est essentielle :

$$4 < 5 \text{ mais } -3 \times 4 > -3 \times 5 !$$

7) Encadrements, valeurs approchées

notation

a et b désignent deux nombres tels que $a \leq b$. Dire que x est compris entre a et b (a et b étant inclus) se note de la façon suivante : $a \leq x \leq b$.

On dit que l'encadrement est d'amplitude $b - a$.

exemples

a) dire que x est compris entre 6 et 7,3 s'écrit : $6 \leq x \leq 7,3$. Cet encadrement est d'amplitude 1,3.

b) 6,3 est la troncature au dixième de x signifie : $6,3 \leq x < 6,4$.

c) 6,3 est l'arrondi au dixième de x signifie : $6,25 \leq x < 6,35$.