Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et de dimension 3

1 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.1

On appelle application orthogonale (ou isométrie vectorielle) de E toute application de E dans E qui conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Notation 1.2

On note $O(E)$ l'ensemble des applications orthogonales de E.

Théorème 1.3

Soit u une application de E dans E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est orthogonale ;

(ii) u est linéaire et conserve la norme : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$;

(iii) u est linéaire et transforme toute base orthonormale en une base orthonormale ;

(iv) u est linéaire et transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

Corollaire 1.4

(i) Une application orthogonale est bijective ;

(ii) Si $u \in O(E)$, alors : $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \left\langle x, u^{-1}(y) \right\rangle$.

Définition 1.5

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice orthogonale si les vecteurs de A forment une base orthonormée de E.

Proposition 1.6

(i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$;

(ii) Si P est une matrice de passage d'une base orthonormée de E vers une autre base orthonormée de E, alors P est une matrice orthogonale.

Théorème 1.7

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(*i*) *Si F est invariant par une application orthogonale u, alors $F^\perp$ est invariant par u et $u|_F \in O(F)$ et $u|_{F^\perp} \in O(F^\perp)$;*

(*ii*) *Réciproquement, si $v \in O(F)$ et $w \in O(F^\perp)$, l'endomorphisme u tel que $u|_F = v$ et $u|_{F^\perp} = w$ appartient à $O(E)$.*

Proposition 1.8

$(O(E), \circ)$ est un groupe.

Théorème 1.9

L'application $\varphi \colon (O(E), \circ) \to (\{-1, +1\}, \times)$ définie par $\varphi(u) = \det(u)$ est un morphisme de groupes.

Remarque 1.10

φ n'est pas bijective. En effet, notons u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. $u \notin O(E)$ bien que $\det(u) = 1$.

Définition 1.11

(*i*) *$\mathrm{Ker}(\varphi)$ est appelé groupe spécial orthogonal de E (ou ensemble des applications orthogonales positives), noté $SO(E)$ ou $O^+(E)$;*

(*ii*) *On appelle ensemble des applications orthogonales négatives, noté $O^-(E)$ l'ensemble défini par $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$.*

Proposition 1.12

$O^+(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$.

Théorème 1.13

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. La symétrie par rapport à F parallèlement à G est une application orthogonale si et seulement si $G = F^\perp$.

Définition 1.14

On appelle retournement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$. Si $n = 3$, un retournement est aussi appelé demi-tour.

Théorème 1.15

Soient $x, y \in E$ de même norme, $x \neq y$. Il existe une unique réflexion échangeant x et y. C'est la symétrie orthogonale par rapport à $H = (\mathbb{R}(x-y))^\perp$.

2 Cas de la dimension 2

Dans tout ce paragraphe, $n = 2$.

Théorème 2.1

(i) Les matrices orthogonales sont de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *ou* $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ *;*

(ii) $\forall\theta \in \mathbb{R}, R_\theta \in O^+(E), S_\theta \in O^-(E)$ *;*

(iii) $\forall\theta, \theta' \in \mathbb{R}, R_{\theta\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ *et* $SO(E)$ *est commutatif.*

Définition 2.2

Les éléments de $O^+(E)$ *sont appelées rotations vectorielles.*

Proposition 2.3

Soit $u \in O(E)$*. On note* $\mathrm{Inv}(u)$ *l'ensemble des éléments de* E *invariants par* u*. On a la classification suivante :*

$\dim(\mathrm{Inv}(u))$	*Nature de* u
2	id_E
1	*Réflexion*
0	*Rotation distincte de* id_E

Théorème 2.4

La composée de deux réflexions est une rotation. Réciproquement, toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions, l'une étant arbitrairement choisie.

Théorème 2.5

Si x *et* y *sont deux vecteurs non nuls de* E *de même norme, alors il existe une unique rotation et une unique réflexion transformant* x *en* y*.*

3 Cas de la dimension 3

Dans tout ce paragraphe, $n = 3$.

Définition 3.1

Une rotation de E *est un endomorphisme de* E *tel qu'il existe une droite* D *vérifiant :*

(i) $u|_D = id_D$ *;*

(ii) $u|_{D^\perp}$ *est une rotation du plan* $D^\perp$*.*

Si $u \neq id_E$*, la droite* D *est unique et est appelée axe de la rotation.*

Théorème 3.2 (*forme réduite*)

Toute application orthogonale u *distincte de* $-id_E$ *et telle que* $\mathrm{Inv}(u) = \{0\}$ *s'écrit de façon unique* $u = s \circ r = r \circ s$*, où* r *est une rotation d'axe* D *et* s *la réflexion par rapport au plan* $P = D^\perp$*. Réciproquement, si* $r \neq id_E$*, l'application* $u = r \circ s = s \circ r$ *définie précédemment vérifie* $\mathrm{Inv}(u) = \{0\}$*.*

Proposition 3.3

Soit $u \in O(E)$. On note $\mathrm{Inv}(u)$ l'ensemble des éléments de E invariants par u. On a la classification suivante :

$\dim(\mathrm{Inv}(u))$	*Nature de u*
3	id_E
2	*réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan P)*
1	*rotation d'axe D, distincte de l'identité*
0	*$r \circ s = s \circ r$, où r est une rotation d'axe D et s la réflexion par rapport à $D^\perp$*

Théorème 3.4

La composée de deux réflexions $s_P \circ s_Q$ (par rapport aux plans P et Q) est une rotation d'axe $P \cap Q$ si $P \neq Q$ et l'identité sinon. Réciproquement, toute rotation r_D d'axe D et distincte de l'identité s'écrit comme produit de deux réflexions s_P et s_Q par rapports à des plans P et Q contenant D et dont l'une peut être choisie arbitrairement.