Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et de dimension 3

1 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.1

On appelle application orthogonale (ou isométrie vectorielle) de E toute application de E dans E qui conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Notation 1.2

On note $O(E)$ l'ensemble des applications orthogonales de E.

Théorème 1.3

Soit u une application de E dans E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) u est orthogonale ;
(ii) u est linéaire et conserve la norme : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$;
(iii) u est linéaire et transforme toute base orthonormale en une base orthonormale ;
(iv) u est linéaire et transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

Preuve. Soit u une application de E dans E.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons u orthogonale. Alors pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. En particulier, pour tout $x \in E$, on a $\langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle$, c'est-à-dire $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$, ou encore $\|u(x)\| = \|x\|$. u conserve donc la norme.
Montrons maintenant que u est linéaire. Soient $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 &= \langle u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y), u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y) \rangle \\ &= \langle u(x+\lambda y), u(x+\lambda y) \rangle - 2 \langle u(x+\lambda y), u(x) \rangle - 2\lambda \langle u(x+\lambda y), u(y) \rangle + 2\lambda \langle u(x), u(y) \rangle + \langle u(x), u(x) \rangle \\ &\quad + \lambda^2 \langle u(y), u(y) \rangle \end{aligned}$$

u étant orthogonale, on a :

$$\langle u(x+\lambda y), u(x+\lambda y) \rangle = \langle x+\lambda y, x+\lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

$$\langle u(x+\lambda y), u(x) \rangle = \langle x+\lambda y, x \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle u(x+\lambda y), u(y) \rangle = \langle x+\lambda y, y \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, y \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \|y\|^2$$

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$
$$\langle u(y), u(y)\rangle = \langle y, y\rangle = \|y\|^2$$
$$\langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

On en déduit :

$$\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle - 2\lambda^2\|y\|^2$$
$$+ 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 = 0$$

Par suite, $\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\| = 0$ donc $u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y) = 0$ et donc u est linéaire.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons que u est linéaire et u conserve la norme. On rappelle que :

$$\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Soient $x, y \in E$.

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Comme u conserve la norme, on en déduit :

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \langle x, y\rangle.$$

u est donc orthogonale.
$(i) \Rightarrow (iii)$ On suppose u orthogonale. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E :

$$\forall j, k \in [\![1\,;n]\!], \langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}.$$

u conserve le produit scalaire donc on en déduit :

$$\forall j, k \in [\![1\,;n]\!], \langle u(e_j), u(e_k)\rangle = \delta_{j,k}.$$

$(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille orthonormale donc libre. C'est une famille libre à n éléments dans un espace de dimension n donc c'est une base de E.
$(iii) \Rightarrow (i)$ On suppose que u est linéaire et transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Soient $x, y \in E$. Il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. En utilisant la linéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Par ailleurs,

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \left\langle u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), u\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j u(e_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle u(e_i), u(e_j)\rangle.$$

u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E donc $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E et donc

$$\forall i, j \in [\![1\,;n]\!], \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \delta_{i,j}.$$

On a alors
$$\langle u(x), u(y)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle .$$
u conserve le produit scalaire donc u est orthogonale.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Evident.
$(iv) \Rightarrow (iii)$ On suppose que u est linéaire et transforme une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E en une base orthonormale $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ de E.
Soit $(e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base orthonormale de E.
$$\forall k \in [\![1\,;n]\!], \exists (a_{1k}, \dots, a_{nk}) \in \mathbb{R}^n, e'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i.$$
Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a
$$u(e'_k) = u\left(\sum_{i=n}^{n} a_{ik} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} u(e_i).$$
Soient $j, k \in [\![1\,;n]\!]$.
$$\left\langle u(e'_j), u(e'_k)\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u(e_i), \sum_{l=1}^{n} a_{lk} u(e_l)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ij} a_{lk} \langle u(e_i), u(e_l)\rangle .$$
$(u(e_1), \dots, u(e_n))$ étant une base orthonormale de E, on a
$$\forall i, l \in [\![1\,;n]\!], \langle u(e_i), u(e_l)\rangle = \delta_{i,l}.$$
On en déduit :
$$\left\langle u(e'_j), u(e'_k)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ij} a_{lk} \delta_{i,l} = \sum_{i=n}^{n} a_{ij} a_{ik}.$$
$(e_1, \dots, e_n)$ étant une base orthonormée de E, on a
$$\forall j, k \in [\![1\,;n]\!], \left\langle e'_j, e'_k\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik}.$$
$(e'_1, \dots, e'_n)$ étant une base orthonormée de E, on a
$$\forall j, k \in [\![1\,;n]\!], \left\langle e'_j, e'_k\right\rangle = \delta_{j,k}.$$
On déduit des égalités précédentes
$$\left\langle u(e'_j), u(e'_k)\right\rangle = \sum_{i=n}^{n} a_{ij} a_{ik} = \left\langle u(e'_j), u(e'_k)\right\rangle = \delta_{j,k}.$$
$(u(e'_1), \dots, u(e'_n))$ est donc une famille orthonormée donc libre, à n éléments dans un espace de dimension n. C'est donc une base de E. □

Corollaire 1.4

(i) Une application orthogonale est bijective ;
(ii) Si $u \in O(E)$, alors : $\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \left\langle x, u^{-1}(y)\right\rangle$.

Preuve.
(i) Soit u une application orthogonale de E. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0$ donc $\|u(x)\| = 0$.

Or $\|u(x)\| = \|x\|$ donc $\|x\| = 0$ et donc $x = 0$. Par suite, $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et donc u est injective. E étant de dimension finie, u est bijective.
(ii) Soient $u \in O(E)$, $x, y \in E$. On utilise le fait que u est bijective et conserve le produit scalaire :

$$\langle u(x), y\rangle = \left\langle u(x), u(u^{-1}(y))\right\rangle = \left\langle x, u^{-1}(y)\right\rangle.$$

□

Définition 1.5

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice orthogonale si les vecteurs de A forment une base orthonormée de E.

Proposition 1.6

(i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si A est inversible et $A^{-1} = {}^t\!A$;
(ii) Si P est une matrice de passage d'une base orthonormée de E vers une autre base orthonormée de E, alors P est une matrice orthogonale.

Preuve.
(i) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est orthogonale. Notons $v_1, \ldots, v_n$ les vecteurs colonnes de A. Soit $B = (b_{ij}) = {}^t\!A$. On a donc, pour tous $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $b_{ij} = a_{ji}$. Soit $C = (c_{ij}) = AB$.

$$\forall i, j \in [\![1\,;n]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$$

donc $C = A{}^t\!A = I_n$. De même, on montre que ${}^t\!AA = I_n$. A est donc inversible et $A^{-1} = {}^t\!A$.
Réciproquement, supposons que A est inversible et $A^{-1} = {}^t\!A$. On a alors $A{}^t\!A = I_n$ et donc pour tous $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $c_{ij} = \delta_{i,j}$. Or $c_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ donc pour tous $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$. Les vecteurs colonnes de A forment donc une base orthonormale de E, ce qui prouve que A est une matrice orthogonale.
(ii) Soit P une matrice de passage d'une base orthonormée de E vers une autre base orthonormée de E. Les vecteurs colonnes de P forment donc une base orthonormée de E. P est donc une matrice orthogonale. □

Théorème 1.7

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
(i) Si F est invariant par une application orthogonale u, alors $F^\perp$ est invariant par u et $u|_F \in O(F)$ et $u|_{F^\perp} \in O(F^\perp)$;
(ii) Réciproquement, si $v \in O(F)$ et $w \in O(F^\perp)$, l'endomorphisme u tel que $u|_F = v$ et $u|_{F^\perp} = w$ appartient à $O(E)$.

Preuve. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
(i) On suppose F invariant par une application orthogonale u, c'est-à-dire $u(F) = F$. Montrons qu'alors $u(F^\perp) = F^\perp$. Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$. u étant orthogonale, on a $\langle u(x), y\rangle = \left\langle x, u^{-1}(y)\right\rangle$. $u(F) = F$ donc $u^{-1}(F) = F$ (on rapelle que u est bijective car orthogonale). $x \in F^\perp$ et $u^{-1}(y) \in F$ donc $\left\langle x, u^{-1}(y)\right\rangle = 0$. par suite, $\langle u(x), y\rangle = 0$ et donc $u(F^\perp) \subset F^\perp$. u est bijective donc $\dim(u(F^\perp)) = \dim(F^\perp)$ et donc $u(F^\perp) = F^\perp$.
(ii) Soient $v \in O(F)$ et $w \in O(F^\perp)$. Il existe un unique endomorphisme u de E tel que $u|_F = v$ et $u|_{F^\perp} = w$ (car $E = F \oplus F^\perp$). En effet, si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1; x_2) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_1 + x_2$. Alors on a $u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = v(x_1) + w(x_2)$. Comme $v(x_1) \in F$ car $v \in O(F)$ et $w(x_2) \in F^\perp$ car $w \in O(F^\perp)$. En utilisant le théorème de Pythagore deux fois, et sachant sur v et w conservent la norme,

on a :

$$\|u(x)\|^2 = \|v(x_1)\|^2 + \|w(x_2)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 .$$

u conserve donc la norme. Par ailleurs, u est clairement linéaire donc $u \in O(E)$. □

Proposition 1.8

$(O(E), \circ)$ est un groupe.

Preuve.

$O(E) \neq \emptyset$ car $id_E \in O(E)$.

$O(E) \subset L(E)$.

Soient $u, v \in O(E)$. v est bijective (comme toute application orthogonale) et $v^{-1} \in O(E)$:

$$\forall x \in E, \left\|v^{-1}(x)\right\| = \left\|v(v^{-1}(x))\right\| = \|x\| .$$

Alors $u \circ v^{-1}$ conserve la norme :

$$\forall x \in E, \left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\| = \|x\| .$$

$u \circ v^{-1}$ est linéaire (composée d'applications linéaires) et conserve la norme donc $u \circ v^{-1} \in O(E)$. Par suite, $O(E)$ est un sous-groupe de $L(E)$. □

Théorème 1.9

L'application $\varphi\colon (O(E), \circ) \to (\{-1, +1\}, \times)$ définie par $\varphi(u) = \det(u)$ est un morphisme de groupes.

Preuve. Soit $u \in O(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. A est une matrice orthogonale donc A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. On en déduit que $\det(A^{-1}) = \det({}^tA)$. Or $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ et $\det({}^tA) = \det(A)$ donc $\dfrac{1}{\det(A)} = \det(A)$, c'est-à-dire $\det(A)^2 = 1$. Le déterminant d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie donc $\det(u)^2 = 1$ et donc $\varphi(u) \in \{-1, +1\}$.

Soient $u, v \in O(E)$. Alors $u \circ v \in O(E)$ et on a :

$$\varphi(u \circ v) = \det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v) = \varphi(u) \times \varphi(v).$$

φ est donc un morphisme de groupes. □

Remarque 1.10

φ n'est pas bijective. En effet, notons u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. $u \notin O(E)$ bien que $\det(u) = 1$.

Définition 1.11

(i) $\operatorname{Ker}(\varphi)$ *est appelé groupe spécial orthogonal de E (ou ensemble des applications orthogonales positives), noté $SO(E)$ ou $O^+(E)$;*

(ii) On appelle ensemble des applications orthogonales négatives, noté $O^-(E)$ l'ensemble défini par $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$.

Proposition 1.12

$O^+(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$.

Preuve.
$O^+(E) \neq \emptyset$ car $id_E \in O^+(E)$ et $O^+(E) \subset O(E)$.
Soit $u \in O^+(E)$. u est orthogonale donc bijective. $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)} = \dfrac{1}{1} = 1$ car $u \in O^+(E)$ donc $u^{-1} \in O^+(E)$.
Soit $v \in O^+(E)$. $\det(v \circ u^{-1}) = \det(v) \times \det(u^{-1}) = 1 \times 1 = 1$ donc $v \circ u^{-1} \in O^+(E)$. $O^+(E)$ est donc un sous-groupe de $O(E)$. □

Théorème 1.13

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. La symétrie par rapport à F parallèlement à G est une application orthogonale si et seulement si $G = F^{\perp}$.

Preuve. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On rappelle que $s\colon E = F \oplus G \to E$ est définie par $x = x_1 + x_2 \mapsto x_1 - x_2$.
Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(x_1; x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\langle x_1, x_2\rangle$$

et

$$\|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2\langle x_1, x_2\rangle .$$

On en déduit

$$\|s(x)\| = \|x\| \iff \|s(x)\|^2 = \|x\|^2 \iff \langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

s est orthogonale si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $(x_1; x_2) \in F \times G$, on a $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ (ce qui signifie $G = F^{\perp}$). □

Définition 1.14

On appelle retournement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$. Si $n = 3$, un retournement est aussi appelé demi-tour.

Théorème 1.15

Soient $x, y \in E$ de même norme, $x \neq y$. Il existe une unique réflexion échangeant x et y. C'est la symétrie orthogonale par rapport à $H = (\mathbb{R}(x-y))^{\perp}$.

Preuve. Soient $x, y \in E$, $x \neq y$, tels que $\|x\| = \|y\|$. Soit $H = (\mathbb{R}(x-y))^{\perp}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à H. Alors $s\colon H \oplus H^{\perp} \to E$ est définie par $x = x_1 + x_2 \mapsto x_1 - x_2$. $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$. Comme $x - y \in \mathbb{R}(x-y)$, on en déduit $x + y \in H$. On a alors

$$s(x) + s(y) = s(x+y) = x + y \text{ et } s(x) - s(y) = s(x-y) = -x + y.$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient $2s(x) = 2y$ donc $s(x) = y$.
s étant involutive, on a $x = s \circ s(x) = s(y)$. s échange donc x et y. D'où l'existence.
Soit s une réflexion par rapport à un hyperplan H, échangeant x et y. On a alors

$$s(x-y) = s(x) - s(y) = y - x = -(x-y)$$

donc $x - y \in H^{\perp}$. H étant de dimension $n-1$, $H^{\perp}$ est dimension 1 et donc $H^{\perp} = \mathbb{R}(x-y)$. Par suite, $H = (\mathbb{R}(x-y))^{\perp}$. D'où l'unicité. □

2 Cas de la dimension 2

Dans tout ce paragraphe, $n = 2$.

Théorème 2.1

(i) Les matrices orthogonales sont de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *ou* $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ *;*

(ii) $\forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta \in O^+(E), S_\theta \in O^-(E)$ *;*

(iii) $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, R_{\theta\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ *et* $SO(E)$ *est commutatif.*

Preuve.

(i) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ donc $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$.

$a^2 + b^2 = 1$ donc il existe un réel θ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

$ac + bd = 0$ donc $(\cos\theta)c + (\sin\theta)d = 0$. Il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $c = -\varepsilon\sin\theta$ et $d = \varepsilon\cos\theta$.

$c^2 + d^2 = 1$ donc $(-\varepsilon\sin\theta)^2 + (\varepsilon\cos\theta)^2 = 1$. Sachant que $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$, on en déduit $\varepsilon^2 = 1$, puis $\varepsilon = \pm 1$.

On a alors $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\varepsilon = \pm 1$.

Réciproquement, on vérifie sans peine qu'une matrice de la forme ci-dessus est orthogonale.

Si $\varepsilon = +1$, A est de la forme R_θ.

Si $\varepsilon = -1$, A est de la forme S_θ.

(ii) Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

$\det(R_\theta) = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ donc $R_\theta \in O^+(E)$.

$\det(S_\theta) = -(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = -1$ donc $S_\theta \in O^-(E)$.

(iii) Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

$$R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix}$$

Utilisant les relations trigonométriques, on obtient alors

$$R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}.$$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta$ et il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $B = R_{\theta'}$.

$$AB = R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'+\theta} = R_{\theta'} R_\theta = BA.$$

$O^+(E)$ est donc commutatif. □

Définition 2.2

Les éléments de $O^+(E)$ *sont appelées rotations vectorielles.*

Proposition 2.3

Soit $u \in O(E)$. On note $\mathrm{Inv}(u)$ l'ensemble des éléments de E invariants par u. On a la classification suivante :

$\dim(\mathrm{Inv}(u))$	*Nature de u*
2	id_E
1	*Réflexion*
0	*Rotation distincte de id_E*

Preuve.
Soit $u \in O(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Notons A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. A est une matrice orthogonale donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$.

$$(x, y) \in \mathrm{Inv}(u) \iff \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (\cos\theta - 1)x - (\varepsilon\sin\theta)y = 0 \\ (\sin\theta)x + (\varepsilon\cos\theta - 1)y = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta - 1 \end{vmatrix} = \varepsilon(\cos\theta)^2 - \cos\theta - \varepsilon\cos\theta + 1 + \varepsilon(\sin\theta)^2 = \varepsilon + 1 - \cos\theta - \varepsilon\cos\theta = (\varepsilon+1)(1-\cos\theta).$$

Si $\varepsilon = 1$ et $\cos\theta \neq 1$, alors $\Delta \neq 0$. Aucun vecteur n'est invariant à part 0 donc $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 0$.
$\det(u) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc $u \in O^+(E)$. u est donc une rotation vectorielle distincte de l'identité.
Si $\varepsilon = 1$ et $\cos\theta = 1$, alors $\sin\theta = 0$ et $A = I_2$ (matrice identité de $\mathbb{R}^2$). Dans ce cas, $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 2$ et $u = id_E$.
Si $\varepsilon = -1$, alors $\Delta = 0$. Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} -2\sin^2\dfrac{\theta}{2}x + 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}y = 0 \\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}x - 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}y = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right\}$. On a donc $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 1$. Notons $D = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right\}$. On a alors $D^\perp = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right\}$.

$$u\left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

u est donc la symétrie orthogonale par rapport à D. □

Théorème 2.4

La composée de deux réflexions est une rotation. Réciproquement, toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions, l'une étant arbitrairement choisie.

Preuve. Soient s et s' deux réflexions. $s \circ s' \in O(E)$ car $O(E)$ est un groupe.
$\det(s \circ s') = \det(s) \times \det(s') = (-1) \times (-1) = 1$ donc $s \circ s' \in O^+(E)$.
Réciproquement, soient r une rotation et s une réflexion. $s \circ r \in O(E)$ car $O(E)$ est un groupe.
$\det(s \circ r) = \det(s) \times \det(r) = -1 \times 1 = -1$ donc $s \circ r \in O^-(E)$. Soit $s' = s \circ r$. s' est une réflexion.

$s \circ s' = s \circ s \circ r$ (on rappelle que s est involutive). r est donc la composée de deux réflexions, s ayant été choisie arbitrairement. □

Théorème 2.5

Si x et y sont deux vecteurs non nuls de E de même norme, alors il existe une unique rotation et une unique réflexion transformant x en y.

Preuve.

Soient x et y sont deux vecteurs non nuls de E de même norme. Quitte à faire la démonstration avec $\dfrac{x}{\|x\|}$ et $\dfrac{y}{\|y\|}$, on peut supposer $\|x\| = \|y\| = 1$. Soit $e_2 \in E$ tel que (x, e_2) soit une base orthonormale de E. Il existe $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tels que $y = y_1 x + y_2 e_2$. On a $1 = \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2$. Il existe un unique $\theta \in [0\,;2\pi[$ tel que $y_1 = \cos\theta$ et $y_2 = \sin\theta$. Par suite, $y = (\cos\theta)x + (\sin\theta)e_2$.

Supposons qu'il existe $u \in O^+(E)$ tel que $u(x) = y$. Soit A la matrice de u dans la base (x, e_2). La première colonne de la matrice A est imposée car $u(x) = y = (\cos\theta)x + (\sin\theta)e_2$ donc $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & * \\ \sin\theta & * \end{pmatrix}$. $A \in O^+(E)$ donc la 2ème colonne est imposée et on a $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. D'où l'unicité.

De même, s'il existe $u \in O^-(E)$ tel que $u(x) = y$, alors A s'écrit de manière unique $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, la première colonne étant imposée par $u(x) = y$ et la deuxième colonne étant imposée par la condition $u \in O^-(E)$. D'où l'unicité.

On vérifie sans peine que les endomorphismes ci-dessus conviennent, d'où l'existence. □

3 Cas de la dimension 3

Dans tout ce paragraphe, $n = 3$. Soit $u \in O(E)$. On note toujours $\mathrm{Inv}(u)$ le sous-espace des vecteurs invariants, c'est-à-dire $\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - id_E)$

Si $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 3$, alors tout vecteur est invariant et donc $u = id_E$.

Supposons maintenant $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 2$. Soient $P = \mathrm{Inv}(u)$ et $D = P^\perp$. P est invariant par u donc $D = P^\perp$ est aussi invariant par u et $u|_D \in O(D)$. D étant de dimension 1, on a $u|_D = \pm id_D$. Or $u|_D \neq id_D$ sinon $u = id_E$ et on aurait $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 3$, ce qui est exclu. Par conséquent, $u|_D = -id_D$. u est alors la réflexion par rapport à P. Réciproquement, toute réflexion par rapport à un plan P a un sous-espace de vecteurs invariants de dimension 2.

Supposons maintenant $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 1$. Soit $D = \mathrm{Inv}(u)$ et $P = D^\perp$. D est invariant par u donc $P = D^\perp$ est aussi invariant par u et $u|_P \in O(P)$. Soit Δ l'ensemble des vecteurs invariants par $u|_P$. $\dim(\Delta) = 0$ sinon on aurait $D \oplus \Delta \subset \mathrm{Inv}(u)$ et $\dim(\mathrm{Inv}(u)) \geqslant \dim(D \oplus \Delta) = \dim(D) + \dim(\Delta) > 1$, ce qui est exclu. D'après la classification en dimension 2, $u|_P \in O^+(P)$ et $u|_P \neq id_P$. $u|_P$ est donc une rotation autre que l'identité.

Définition 3.1

Une rotation de E est un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite D vérifiant :
(i) $u|_D = id_D$;
(ii) $u|_{D^\perp}$ est une rotation du plan $D^\perp$.
Si $u \neq id_E$, la droite D est unique et est appelée axe de la rotation.

Soit u une rotation de E.On note D la droite vérifiant les conditions ci-dessus. Soit e_1 un vecteur unitaire tel que $D = \mathbb{R}e_1$. Soit $P = D^\perp$. Soit (e_2, e_3) une base orthonormale de P telle que (e_1, e_2, e_3) soit une base directe de E. La matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Supposons maintenant $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 0$. Soit x un vecteur non nul de E. Soit $x' = u(x)$. x et x' sont de même norme donc il existe une unique réflexion s échangeant x et x'. $s(x') = x$, c'est-à-dire $s \circ u(x) = x'$. s est la réflexion par rapport à $H = (\mathbb{R}(x - x'))^\perp$. Etudions $s \circ u$.
Si $\dim(\mathrm{Inv}(s \circ u)) = 3$, alors $s \circ u = id_E$ et donc $u = s$ (car s est involutive). Dans ce cas, on aurait $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 2$, ce qui est exclu.
Si $\dim(\mathrm{Inv}(s \circ u)) = 2$, alors $s \circ u$ est une réflexion s' par rapport à un plan P. $u = s \circ s'$ et alors $P \cap H \subset \mathrm{Inv}(u)$ et $\dim(P \cap H) \geqslant 1$ (P et H étant deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 dans un espace de dimension 3), ce qui contredit $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 0$.
Si $\dim(\mathrm{Inv}(s \circ u)) = 1$, alors $s \circ u$ est une rotation r d'axe D non inclus dans H (sinon tout vecteur de D serait invariant par r, et par $s \circ r = u$, ce qui contredit $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 0$). On a alors $u = s \circ r$.

Théorème 3.2 (*forme réduite*)

> *Toute application orthogonale u distincte de $-id_E$ et telle que* $\mathrm{Inv}(u) = \{0\}$ *s'écrit de façon unique $u = s \circ r = r \circ s$, où r est une rotation d'axe D et s la réflexion par rapport au plan $P = D^\perp$. Réciproquement, si $r \neq id_E$, l'application $u = r \circ s = s \circ r$ définie précédemment vérifie* $\mathrm{Inv}(u) = \{0\}$.

Preuve.
Soit u une application orthogonale distincte de $-id_E$ et telle que $\mathrm{Inv}(u) = \{0\}$. Soit P_u le polynôme caractéristique de u. P_u est de degré 3 donc admet au moins une racine réelle λ, qui est donc valeur propre de u. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$. On a alors $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. Par ailleurs, on a $\|u(x)\| = \|x\|$ car u est orthogonale, donc $|\lambda| \cdot \|x\| = \|x\|$. $x \neq 0$ donc $\|x\| \neq 0$ et donc $|\lambda| = 1$, c'est-à-dire $\lambda \in \{-1, 1\}$. $\lambda \neq 1$ sinon on aurait $\dim(\mathrm{Inv}(u)) \geqslant 1$, ce qui est exclu. On en déduit alors $\lambda = -1$.
Soit $D = \mathbb{R}x$. Soit $P = D^\perp$. D est invariant par u donc il en est de même pour P et $u|_P \in O(P)$. $u|_P$ n'est pas une réflexion car cela contredirait $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 0$ donc $u|_P$ est une rotation. Il existe donc une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E, avec $e_1 \in \mathbb{R}x = D$, $e_2, e_3 \in P$ et un réel θ tels que la matrice de u dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Soient B et C les matrices définies de la manière suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $B \times C = C \times B = A$. Soit r l'application orthogonale dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est B. D'après ce qui précède, r est une rotation d'axe D. Soit s l'application orthogonale dont a matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est C. s est la réflexion par rapport à $D^\perp = P$. On a ainsi montré que $u = r \circ s = s \circ r$. D'où l'existence.

Il reste à montrer l'unicité :
Supposons que $u = r \circ s = s \circ r$, où r est une rotation d'axe D et s la réflexion par rapport à $P = D^\perp$. Il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E et un réel θ tels que la matrice de r dans la base (e_1, e_2, e_3) soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}e_1 = D$ et $D^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Alors la matrice de s dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La matrice de u^2 dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

u^2 est donc une rotation vectorielle.
$\theta \neq \pi \pmod{2\pi}$ sinon on aurait $u = -id_E$, ce qui est exclu.
$\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ sinon on aurait $\dim(\mathrm{Inv}(u)) = 2$, ce qui est exclu.
On a donc $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$, c'est-à-dire $2\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. u^2 est donc une rotation vectorielle distincte de l'identité donc D est déterminé de manière unique et donc $P = D^\perp$ aussi.
Réciproquement, si $r \neq id_E$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ tel que la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) soit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Inv}(u)$. Alors

$$\begin{cases} -x_1 = x_1 \\ (\cos\theta)x_2 - (\sin\theta)x_3 = x_3 \\ (\sin\theta)x_2 + (\cos\theta)x_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ (\cos\theta - 1)x_2 - (\sin\theta)x_3 = 0 \\ (\sin\theta)x_2 + (\cos\theta - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} = \cos^2\theta - 2\cos\theta + \sin^2\theta = 2(1 - \cos\theta) \neq 0$$

car $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ donc le système

$$\begin{cases} (\cos\theta - 1)x_2 - (\sin\theta)x_3 = 0 \\ (\sin\theta)x_2 + (\cos\theta - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

admet $(0;0)$ comme unique solution (système de Cramer).
Finalement, $x_1 = x_2 = x_3$ et donc $\text{Inv}(u) = \{0\}$. □

Proposition 3.3

Soit $u \in O(E)$. On note $\text{Inv}(u)$ l'ensemble des éléments de E invariants par u. On a la classification suivante :

$\dim(\text{Inv}(u))$	*Nature de u*
3	id_E
2	*réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan P)*
1	*rotation d'axe D, distincte de l'identité*
0	*$r \circ s = s \circ r$, où r est une rotation d'axe D et s la réflexion par rapport à $D^{\perp}$*

Théorème 3.4

La composée de deux réflexions $s_P \circ s_Q$ (par rapport aux plans P et Q) est une rotation d'axe $P \cap Q$ si $P \neq Q$ et l'identité sinon. Réciproquement, toute rotation r_D d'axe D et distincte de l'identité s'écrit comme produit de deux réflexions s_P et s_Q par rapports à des plans P et Q contenant D et dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Preuve.
Soient s_P et s_Q deux réflexions par rapport aux plans P et Q. Si $P = Q$, alors $s_P \circ s_Q = s_P \circ s_P = id_E$ car s_P est involutive. On suppose maintenant $P \neq Q$. Soit $D = P \cap Q$. $\dim(E) = 3$ et $\dim(P) = \dim(Q) = 2$ donc $D \neq \{0\}$ (sinon E serait de dimension 4 au moins). $\dim(D) \neq 2$ sinon $P = Q$. D est donc une droite vectorielle et $D^{\perp}$ est un plan vectoriel.
Notons $r = s_P \circ s_Q$. $r|_D = id_D$ donc $r|_{D^{\perp}} \in O(D^{\perp})$. $r|_{D^{\perp}}$ est la composée de deux réflexions planes $s_P|_{D^{\perp}}$ et $s_Q|_{D^{\perp}}$ donc $r|_{D^{\perp}}$ est une rotation vectorielle de $O(D^{\perp})$. r est alors, par définition, une rotation de E.
Réciproquement, soit r_D une rotation vectorielle d'axe D. Alors $r|_D = id_D$ et $r|_{D^{\perp}}$ est une rotation plane de $D^{\perp}$. Soient P un plan vectoriel contenant D et s_P la réflexion de E par rapport à P. Alors $s_P|_{D^{\perp}}$ est une réflexion plane de $D^{\perp}$. D'après ce qui a été vu en dimension 2, il existe une unique réflexion plane $s_{D'}$ par rapport à une droite $D' \subset D^{\perp}$ telle que $r|_{D^{\perp}} = s_P|_{D^{\perp}} \circ s_{D'}$. Soit $Q = D' \oplus D$ et s_Q la réflexion par rapport à Q. On a bien $(s_P \circ s_Q)|_D = id_D$ et $(s_P \circ s_Q)|_{D^{\perp}}$ est une rotation du plan $D^{\perp}$, $r|_D = (s_P \circ s_Q)|_D$ et $r|_{D^{\perp}} = (s_P \circ s_Q)|_{D^{\perp}}$ donc $r = s_P \circ s_Q$. □

4 Reconnaître des endomorphismes orthogonaux

4.1 Déterminer l'angle d'une rotation

Soit u une rotation dans un espace euclidien E de dimension 3. On sait que la matrice de u dans une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E telle que $\text{Inv}(u) = \text{Vect}(e_1)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La trace de u ne dépend pas de la base choisie donc $\text{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$, ce qui permet d'obtenir $\cos\theta$.

Soit $x = (x_1; x_2; x_3) \in E$, les coordonnées de x étant exprimées dans la base (e_1, e_2, e_3).

$$u(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ (\cos\theta)x_2 - (\sin\theta)x_3 \\ (\sin\theta)x_2 + (\cos\theta)x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(x, u(x), e_1) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & (\cos\theta)x_2 - (\sin\theta)x_3 & 0 \\ x_3 & (\sin\theta)x_2 + (\cos\theta)x_3 & 0 \end{vmatrix} = (\sin\theta)x_2^2 + (\sin\theta)x_3^2 = (\sin\theta)(x_2^2 + x_3^2)$$

donc $\det(x, u(x), e_1)$ est du signe de $\sin\theta$, ce qui permet de déterminer θ.

4.2 Exemple 1

Reconnaître l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$ donc $u \in O(\mathbb{R}^3)$. pour calculer $\det(A)$, nous allons effectuer les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$:

$$\det(A) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

donc $u \in O^+(\mathbb{R}^3)$. u est donc une rotation. L'axe de la rotation est $D = \mathrm{Inv}(u)$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Inv}(u) \iff \begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = x \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = y \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous allons effectuer les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$. On obtient :

$$\begin{cases} 9y - 3z = 0 \\ -9y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3y \\ x = y \end{cases}$$

donc $D = \mathrm{Vect}(e_1')$, avec $e_1' = \frac{1}{\sqrt{11}}(e_1 + e_2 + 3e_3)$, vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$.

$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$. Par ailleurs, $\mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$ donc $1 + 2\cos\theta = -\frac{2}{3}$ et donc $\cos\theta = -\frac{5}{6}$.
Nous allons déterminer le signe de $\sin\theta$ en calculant :

$$\det(e_1, u(e_1), e_1') = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{\sqrt{11}} \end{vmatrix} = \frac{5}{3\sqrt{11}} > 0$$

donc $\sin\theta > 0$ et donc $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right) \pmod{2\pi}$.

u est donc la rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(e_1')$, avec $e_1' = \frac{1}{\sqrt{11}}(e_1 + e_2 + 3e_3)$, et d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right) \pmod{2\pi}$.

4.3 Exemple 2

Reconnaître l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$ donc $u \in O(\mathbb{R}^3)$. Pour calculer $\det(A)$, nous allons effectuer les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + 8L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$:

$$\det(u) = \det(A) = -\frac{1}{729}\begin{vmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{729}\begin{vmatrix} 0 & 36 & -63 \\ 0 & -9 & 36 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{729}\begin{vmatrix} 36 & -63 \\ -9 & 36 \end{vmatrix} = -\frac{81}{729}\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

donc $u \in O^-(\mathbb{R}^3)$. u est soit une réflexion, soit la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation dont l'axe est orthogonal au plan de la réflexion.
${}^tA = A$ donc $u^{-1} = u$. u est involutive donc u est une réflexion. Nous allons déterminer $\mathrm{Inv}(u)$:

$$(x,y,z) \in \mathrm{Inv}(u) \iff \begin{cases} \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{1}{9}z = x \\ -\frac{4}{9}x - \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z = y \\ -\frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{8}{9}z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x - 4y - z = 0 \\ -4x - 16y - 4z = 0 \\ -x - 4y - z = 0 \end{cases} \iff x + 4y + z = 0$$

donc $\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Vect}(e'_1, e'_2)$, avec $e'_1 = -4e_1 + e_2$ et $e'_2 = -e_1 + e_3$. u est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2)$.

4.4 Exemple 3

Reconnaître l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$ donc $u \in O(\mathbb{R}^3)$. Pour calculer $\det(A)$, nous allons effectuer les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \sqrt{6}L_2$:

$$\det(u) = \det(A) = -\frac{1}{64}\begin{vmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{64}\begin{vmatrix} 0 & -8 & 4\sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ 0 & 4\sqrt{6} & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} -8 & 4\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} & -4 \end{vmatrix} = -1$$

donc $u \in O^-(\mathbb{R}^3)$. u est soit une réflexion, soit la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation dont l'axe est orthogonal au plan de la réflexion. ${}^tA \neq A$ donc u n'est pas une réflexion. u s'écrit don $s \circ r = r \circ s$, où s est une réflexion par rapport à un plan P et r est la rotation d'axe $D = P^\perp$. On sait que $D = \{\lambda \in \mathbb{R}^3, u(\lambda) = -\lambda\}$.

$$(x,y,z) \in D \iff \begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{\sqrt{6}}{4}z = -x \\ -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{6}}{4}z = -y \\ \frac{\sqrt{6}}{4}x - \frac{\sqrt{6}}{4}y - \frac{2}{4}z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ \sqrt{6}x - \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations de ce système sont identiques. En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - \sqrt{6}L_1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

donc $D = \mathrm{Vect}(e'_1)$, avec $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$. Il reste à déterminer l'angle θ de la rotation r.
$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A) = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{4} = -2$. donc $-1 + 2\cos\theta = -2$ et donc $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$.
Nous allons déterminer le signe de $\sin\theta$ en calculant :

$$\det(e_1, u(e_1), e'_1) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} < 0$$

donc $\sin\theta < 0$ et donc $\theta = -\dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.
$u = s \circ r = r \circ s$, où r est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e'_1)$, avec $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et d'angle $\theta = -\dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$, et s est la réflexion par rapport à $(\mathrm{Vect}(e'_1))^{\perp}$.