Isométries du plan affine euclidien. Formes réduites. Applications

$\mathcal{E}$ désigne un plan affine euclidien de direction E.

1 Isométries du plan affine euclidien

Définition 1.1

On appelle isométrie de $\mathcal{E}$ toute application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve les distances :

$$\forall M, N \in \mathcal{E},\ f(M)f(N) = MN.$$

On note $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$.

Théorème 1.2

Une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une isométrie si et seulement si f est une application affine dont la partie linéaire associée est une application orthogonale.

Corollaire 1.3

$(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe.

Remarque 1.4

En tant qu'applications affines, les isométries conservent les barycentres donc l'alignement des points (et donc l'image d'une droite par une isométrie est une droite)

Définition 1.5

(i) On appelle déplacement (ou isométrie positive) une isométrie dont la partie linéaire est un élément de $O^+(E)$. On note $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ l'ensemble des déplacements ;

(ii) On appelle antidéplacement (ou isométrie négative) une isométrie dont la partie linéaire est un élément de $O^-(E)$. On note $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$ l'ensemble des antidéplacements.

Lemme 1.6

Si $\varphi \in O(E)$, alors $E = \ker(\varphi - id_E) \overset{\perp}{\bigoplus} \operatorname{Im}(\varphi - id_E)$.

Théorème 1.7 (*forme canonique d'une isométrie*)

Tout isométrie f de $\mathcal{E}$, de partie linéaire φ, s'écrit de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} \in \operatorname{Inv}(\varphi)$ et $g \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, g possédant au moins un point fixe.

2 Isométries du plan

Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. D'après le paragraphe précédent, f est une application affine et l'application linéaire associée, que l'on notera φ, est une application orthogonale.

Définition 2.1

On appelle rotation du plan une application affine admettant au moins un point invariant et dont la partie linéaire est une rotation vectorielle. L'angle de la rotation vectorielle est appelé angle de la rotation affine. On a montré qu'une rotation affine autre que l'identité a un unique point fixe, appelé centre de la rotation.

Définition 2.2

Soit d une droite de $\mathcal{E}$. On appelle réflexion affine d'axe d l'application s_d définie sur $\mathcal{E}$ par $M \mapsto M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$, p désignant la projection orthogonale sur d.

Définition 2.3

On appelle symétrie glissée la composée commutative d'une réflexion par rapport à une droite de direction $\overrightarrow{D}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$.

On a la classification suivante :

Isométrie	Ensemble de points invariants	Application linéaire associée	$\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$
identité	$\mathcal{E}$	id_E	$\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$
réflexion affine par rapport à une droite d	d	réflexion vectorielle par rapport à $\overrightarrow{d}$	$\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$
rotation affine de centre A et d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	A	rotation vectorielle d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	$\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$
translation de vecteur non nul	$\emptyset$	id_E	$\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$
symétrie glissée	$\emptyset$	réflexion vectorielle	$\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$

Théorème 2.4

(i) La composée de deux réflexions affines d'axes parallèles est une translation. Réciproquement, toute translation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions, l'une étant choisie arbitrairement ;

(ii) Soient d et d' deux droites sécantes en A. $s_d \circ s_{d'}$ est la rotation de centre A et d'angle $2(d, d')$. Réciproquement, toute rotation de centre A peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes passant par A, l'une étant choisie arbitrairement.

Corollaire 2.5

Les réflexions engendrent le groupe des isométries du plan.

3 Isométries conservant une partie

Notation 3.1

$\mathcal{P}$ désigne une partie de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ l'ensemble des isométries laissant $\mathcal{P}$ invariant, c'est-à-dire l'ensemble des isométries f férifiant $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Théorème 3.2

(i) $(\mathcal{I}s(\mathcal{P}), \circ)$ est un groupe et $(\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}s(\mathcal{P}), \circ)$;

(ii) Si $s \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$, alors l'application $\psi : \mathcal{I}s^+(\mathcal{P}) \to \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$ définie par $f \mapsto s \circ f$ est bijective. On peut alors écrire $\mathcal{I}s^-(\mathcal{P}) = s \cdot \mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$.

Théorème 3.3

Si $\mathcal{P}$ est une partie finie du plan de cardinal $n \geqslant 2$, alors le groupe $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est fini et on a $\mathrm{card}(\mathcal{I}s^+(\mathcal{P})) \leqslant n$ et $\mathrm{card}(\mathcal{I}s(\mathcal{P})) \leqslant 2n$.

Théorème 3.4

Soit $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$ une partie finie de $\mathcal{E}$.

(i) L'application $\phi : \mathcal{I}s(\mathcal{P}) \to \mathcal{S}_n$ définie par $f \mapsto \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ f(A_1) & f(A_2) & \dots & f(A_n) \end{pmatrix}$ est un homomorphisme de groupes ;

(ii) Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace affine engendré par les points $A_1, \dots, A_n$.
Si $\mathcal{A} = \mathcal{E}$, alors ϕ est injective, $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est fini, isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ et de cardinal un diviseur de $n!$.
Si $\mathcal{A}$ est un hyperplan, alors $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$est fini et de cardinal $2d$, où d est un diviseur de $n!$.
Dans tous les autres cas, $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est infini.

Définition 3.5

Soient n points $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$. On note $A_k = A_j$ si $k \equiv j \pmod n$. On suppose que 3 points consécutifs A_i, A_{i+1}, A_{i+2} quelconques ne sont pas alignés. On appelle polygone $\mathcal{P}$ de sommets $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ la famille de segments $[A_0A_1], [A_1A_2], \dots [A_{n-2}A_{n-1}], [A_{n-1}A_0]$. On note par commodité $\mathcal{P} = A_0A_2 \dots A_{n-1}$. Les points $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ sont appelés sommets du polygone $\mathcal{P}$ et les segments $[A_iA_{i+1}]$ sont appelés arêtes du polygone.

Théorème 3.6

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et $\mathcal{P}_n = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ un polygone. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{P}_n$ est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et pour tout $k \in N$, $A_kA_{k+1} = A_0A_1$;

(ii) Il existe une rotation r telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r(A_k) = A_{k+1}$.

Définition 3.7

Un polygone $\mathcal{P}_n$ vérifiant l'une des conditions du théorème précédent est appelé polygone régulier.

Théorème 3.8

Soit $\mathcal{P}_n$ un polygone régulier à n côtés.

(i) $\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}_n) = \{id_{\mathcal{E}}, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$*, où r est la rotation définie dans le théorème précédent ;*

(ii) Il y a exactement n réflexions laissant $\mathcal{P}_n$ invariant : ce sont les réflexions d'axes (OA_k) et les médiatrices des arêtes $[A_k A_{k+1}]$, $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.