Isométries du plan affine euclidien. Formes réduites. Applications

$\mathcal{E}$ désigne un plan affine euclidien de direction E.

1 Isométries du plan affine euclidien

Définition 1.1

On appelle isométrie de $\mathcal{E}$ toute application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve les distances :

$$\forall M, N \in \mathcal{E},\ f(M)f(N) = MN.$$

On note $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$.

Théorème 1.2

Une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une isométrie si et seulement si f est une application affine dont la partie linéaire associée est une application orthogonale.

Preuve. Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
Supposons que f est une application affine dont la partie linéaire associée est une application orthogonale. Notons φ la partie linéaire de f. Soient $M, N \in \mathcal{E}$. On a $f(M)f(N) = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{MN})\|$. φ étant orthogonale, on a $\|\varphi(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\| = MN$. On a donc $f(M)f(N) = MN$, ce qui prouve que f est une isométrie.
Supposons maintenant que f est une isométrie. Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(M)}$. Soient $O, M, N \in \mathcal{E}$. $f(M)f(N) = MN$ donc $f(M)f(N)^2 = MN^2$, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|^2 = \|\overrightarrow{MN}\|^2$. En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire

$$\|\overrightarrow{f(M)f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2 = \|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}\|^2.$$

Or

$$\|\overrightarrow{f(M)f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2 = f(M)f(O)^2 + 2\overrightarrow{f(M)f(O)} \cdot \overrightarrow{f(O)f(N)} + f(O)f(N)^2$$

et

$$\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}\|^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{ON} + ON^2.$$

Sachant que $f(M)f(O) = MO$ et $f(O)f(N) = ON$ (car f est une isométrie), on a alors

$$\overrightarrow{f(M)f(O)} \cdot \overrightarrow{f(O)f(N)} = \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{ON}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(\overrightarrow{MO}) \cdot \varphi(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{ON}.$$

Ceci étant vrai pour tous $M, N, O \in \mathcal{E}$, φ conserve le produit scalaire. φ est donc linéaire et $\varphi \in O(E)$. φ est donc une application affine dont l'application linéaire associée est orthogonale. $\square$

Corollaire 1.3

$(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe.

Preuve. $\mathcal{I}s(\mathcal{E}) \neq \emptyset$ car $id_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$. $\circ$ est associative.
Soient $f, g \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$. Notons φ l'application linéaire associée à f, ψ l'application linéaire associée à g. Alors $f \circ g$ est une application affine dont l'application linéaire associée est $\varphi \circ \psi$. D'après le théorème précédent, $\varphi \in O(E)$ et $\psi \in O(E)$. $(O(E), \circ)$ étant un groupe, on en déduit $\phi \circ \psi \in O(E)$. Par suite, $f \circ g \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$.
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, d'application linéaire associée φ. Alors $\varphi \in O(E)$ donc φ est bijective et donc f est bijective. f^{-1} est alors affine et l'application linéaire associée est $\varphi^{-1} \in O(E)$. Par conséquent, $f^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$.
Il est immédiat que $id_{\mathcal{E}}$ est élément neutre.
Finalement, $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ est bien un groupe. □

Remarque 1.4

En tant qu'applications affines, les isométries conservent les barycentres donc l'alignement des points (et donc l'image d'une droite par une isométrie est une droite)

Définition 1.5

(i) On appelle déplacement (ou isométrie positive) une isométrie dont la partie linéaire est un élément de $O^+(E)$. On note $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ l'ensemble des déplacements ;
(ii) On appelle antidéplacement (ou isométrie négative) une isométrie dont la partie linéaire est un élément de $O^-(E)$. On note $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$ l'ensemble des antidéplacements.

Lemme 1.6

Si $\varphi \in O(E)$, alors $E = \ker(\varphi - id_E) \overset{\perp}{\bigoplus} \operatorname{Im}(\varphi - id_E)$.

Preuve. Soit $\varphi \in O(E)$. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\ker(\varphi - id_E)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi - id_E)) = \dim(P).$$

Soient $x \in \ker(\varphi - id_E)$ et $y \in \operatorname{Im}(\varphi - id_E)$.
$x \in \ker(\varphi - id_E)$ donc $\varphi(x) = x$.
$y \in \operatorname{Im}(\varphi - id_E)$ donc il existe $x' \in E$ tel que $y = \varphi(x') - x'$.

$$x \cdot y = \varphi(x) \cdot (\varphi(x') - x') = \varphi(x) \cdot \varphi(x') - \varphi(x) \cdot x'.$$

$\varphi \in O(E)$ donc φ conserve le produit scalaire donc $\varphi(x) \cdot \varphi(x') = x \cdot x'$. $\varphi(x) = x$ donc $\varphi(x) \cdot x' = x \cdot x'$. Par suite, $x \cdot y = x \cdot x' - x \cdot x' = 0$ donc $\ker(\varphi - id_E) \perp \operatorname{Im}(\varphi - id_E)$ et donc $\ker(\varphi - id_E) \cap \operatorname{Im}(\varphi - id_E) = \{0\}$.
Finalement, on a bien $E = \ker(\varphi - id_E) \overset{\perp}{\bigoplus} \operatorname{Im}(\varphi - id_E)$. □

Théorème 1.7 (*forme canonique d'une isométrie*)

Tout isométrie f de $\mathcal{E}$, de partie linéaire φ, s'écrit de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} \in \operatorname{Inv}(\varphi)$ et $g \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, g possédant au moins un point fixe.

Preuve. Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$ de partie liéaire φ.
Montrons d'abord l'unicité de l'écriture. Supposons $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} \in \operatorname{Inv}(\varphi)$ et $g \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, g possédant au moins un point fixe O. $f(O) = t_{\vec{u}}(g(O)) = t_{\vec{u}}(O) = O + \vec{u}$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{Of(O)}$. Soit $A \in \mathcal{E}$.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(O)} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Af(A)} + \varphi(\overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{Af(A)} + (\varphi - id_E)(\overrightarrow{AO})$$

donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{Af(A)} + \mathrm{Im}(\varphi - id_E)$. $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Inv}(\varphi)$ donc $\overrightarrow{u} \in \ker(\varphi - id_E)$. On en déduit

$$\overrightarrow{u} \in \left(\overrightarrow{Af(A)} + \mathrm{Im}(\varphi - id_E)\right) \cap \ker(\varphi - id_E).$$

Or $\overrightarrow{Af(A)} + \mathrm{Im}(\varphi - id_E)$ et $\ker(\varphi - id_E)$ sont deux espaces affines dont les directions sont orthogonales (on utilise la structure canonique d'un espace affine sur un espace vectoriel) donc leur intersection contient un unique élément. Par suite, $\overrightarrow{u}$ est unique. g est alors définie de manière unique par $g = t_{-\vec{u}} \circ f$.
Montrons maintenant l'existence. Soit $A \in \mathcal{E}$.
Soit $\overrightarrow{u}$ l'unique élément de $\left(\overrightarrow{Af(A)} + \mathrm{Im}(\varphi - id_E)\right) \cap \ker(\varphi - id_E)$. $\overrightarrow{u} \in \ker(\varphi - id_E)$ donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Inv}(\varphi)$. Il existe $O \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Af(A)} + (\varphi - id_E)(\overrightarrow{AO})$. Alors

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(A)} + \varphi(\overrightarrow{AO}) - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{Of(A)} + \overrightarrow{f(A)f(O)} = \overrightarrow{Of(O)}.$$

Soit $g = f \circ t_{-\vec{u}}$. On a alors $f = g \circ t_{\vec{u}}$ et

$$g(O) = f \circ t_{-\vec{u}}(O) = f(O - \overrightarrow{u}) = f(O) - \varphi(\overrightarrow{u}) = f(O) - \overrightarrow{u} = f(O) - \overrightarrow{Of(O)} = O.$$

O est donc un point fixe de g. $g \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ car $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ et $t_{\vec{u}} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$.
Il reste à prouver la commutativité. Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$g \circ t_{\vec{u}}(M) = g(M + \overrightarrow{u}) = g(M) + \varphi(\overrightarrow{u}) = g(M) + \overrightarrow{u} = t_{\vec{u}} \circ g(M).$$

□

2 Isométries du plan

Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. D'après le paragraphe précédent, f est une application affine et l'application linéaire associée, que l'on notera φ, est une application orthogonale. D'après la classification du groupe orthogonal en dimension 2, on en déduit que $\varphi = id_E$ ou φ est une rotation vectorielle distincte de l'identité, ou φ est une réflexion.

1er cas : $\varphi = id_E$.
On suppose que f n'admet pas de point fixe. Soient $A \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Af(A)}$.

$$\forall M \in \mathcal{E}, f(M) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}) = f(A) + \overrightarrow{AM}.$$

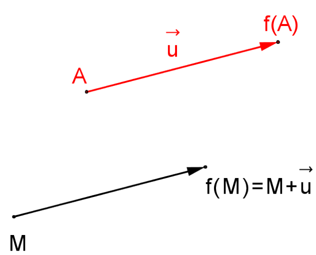

FIGURE 1 – Translation

On a alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a :

$\overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Af(M)} + \overrightarrow{f(M)M}$, soit $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{u}$. f est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
Si f admet un point fixe A, alors $f = id_{\mathcal{E}}$. En effet :

$$\forall M \in \mathcal{E}, f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} = M.$$

Dans ce cas, $f = id_{\mathcal{E}}$.

2ème cas : φ est une rotation vectorielle distincte de l'identité.
Alors $\mathrm{Inv}\,\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$, c'est-à-dire $\ker(\varphi - id_E) = \{\overrightarrow{0}\}$. Montrons qu'alors f admet un unique point fixe A. Soit $O \in \mathcal{E}$. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)f(A)} = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{Of(A)}$.

$$\begin{aligned} f \text{ admet un point fixe } A &\iff f(A) = A \\ &\iff \varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OA} \\ &\iff (\varphi - id_E)(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)O} \end{aligned}$$

$\ker(\varphi - id_E) = \{\overrightarrow{0}\}$ donc $\varphi - id_E$ est injectif donc bijectif car on est en dimension finie. Il existe donc un unique vecteur $\overrightarrow{v}$ vérifiant $(\varphi - id_E)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f(O)O}$ donc un unique point A tel que $(\varphi - id_E)(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)O}$.
f admet donc un unique point fixe A (on a $\mathrm{Inv}(f) = \{A\}$).

Définition 2.1

On appelle rotation du plan une application affine admettant au moins un point invariant et dont la partie linéaire est une rotation vectorielle. L'angle de la rotation vectorielle est appelé angle de la rotation affine. On a montré qu'une rotation affine autre que l'identité a un unique point fixe, appelé centre de la rotation.

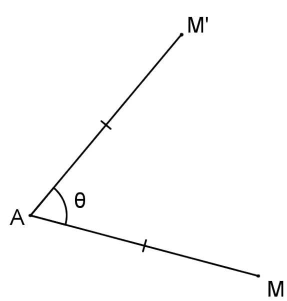

FIGURE 2 – Rotation

3ème cas : φ est une symétrie vectorielle par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$.
Supposons dans un premier temps que f a un point fixe (au moins), que l'on notera A. Soit $M \in \mathcal{E}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur $A + \overrightarrow{D}$ (voir FIGURE 3). Alors $\overrightarrow{AH} \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{HM} \in \overrightarrow{D}^{\perp}$. Sachant que $f(A) = A$ et que φ est une réflexion vectorielle, on a :

$$f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HM} = M + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HM} = M + 2\overrightarrow{MH}.$$

Dans ce cas, $\mathrm{Inv}\, f = A + \overrightarrow{D}$. En effet :

$$\begin{aligned} B \text{ est point fixe de } f &\iff f(B) = B \\ &\iff B = f(A + \overrightarrow{AB}) = A + \varphi(\overrightarrow{AB}) \\ &\iff \overrightarrow{AB} \in \mathrm{Inv}\,\varphi = \overrightarrow{D} \\ &\iff B \in A + \overrightarrow{D} \end{aligned}$$

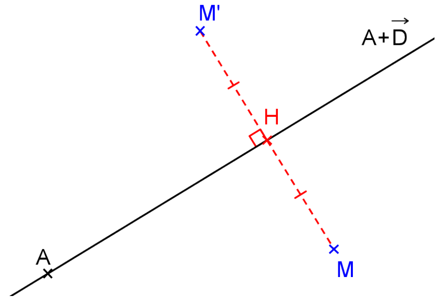

FIGURE 3 – Réflexion

Définition 2.2

Soit d une droite de $\mathcal{E}$. On appelle réflexion affine d'axe d l'application s_d définie sur $\mathcal{E}$ par $M \mapsto M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$, p désignant la projection orthogonale sur d.

Supposons maintenant que f n'a pas de point fixe. D'après la forme canonique d'une isométrie, f s'écrit de manière unique $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Inv} \varphi$ et g est une isométrie admettant au moins un point fixe A. Comme $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$, g est une isométrie dont la partie linéaire est φ (qui est une réflexion vectorielle) admettant au poins un point fixe A. D'après le cas précédent, g est donc la réflexion d'axe $A + \operatorname{Inv} \varphi$.

Définition 2.3

On appelle symétrie glissée la composée commutative d'une réflexion par rapport à une droite de direction $\overrightarrow{D}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$.

Sur la FIGURE 4 , en bleu $t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ et en vert $g \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

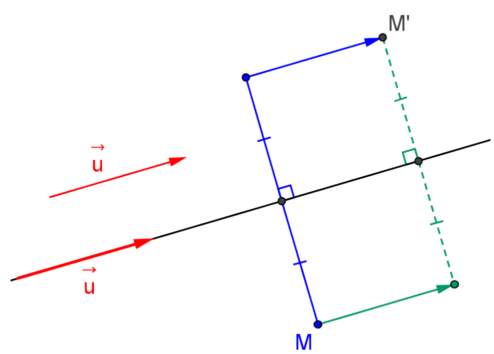

FIGURE 4 – Symétrie glissée

On peut tout résumer dans le tableau suivant :

Isométrie	Ensemble de points invariants	Application linéaire associée	$\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$
identité	$\mathcal{E}$	id_E	$\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$
réflexion affine par rapport à une droite d	d	réflexion vectorielle par rapport à $\overrightarrow{d}$	$\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$
rotation affine de centre A et d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	A	rotation vectorielle d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	$\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$
translation de vecteur non nul	$\emptyset$	id_E	$\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$
symétrie glissée	$\emptyset$	réflexion vectorielle	$\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$

Théorème 2.4

(i) La composée de deux réflexions affines d'axes parallèles est une translation. Réciproquement, toute translation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions, l'une étant choisie arbitrairement ;

(ii) Soient d et d' deux droites sécantes en A. $s_d \circ s_{d'}$ est la rotation de centre A et d'angle $2(d, d')$. Réciproquement, toute rotation de centre A peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes passant par A, l'une étant choisie arbitrairement.

Preuve.

(i) Soient d et d' deux droites parallèles, de directions $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{d'}$. $s_d \circ s_{d'} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ car c'est la composée de deux isométries. L'application linéaire associée est $\overrightarrow{s_d \circ s_{d'}} = \overrightarrow{s_d} \circ \overrightarrow{s_{d'}} = id_P$ car $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d'}$. On en déduit que $s_d \circ s_{d'}$ est l'identité ou une translation de vecteur non nul.

Si $d = d'$, alors $s_d \circ s_{d'} = id_{\mathcal{E}}$.

Si $d \neq d'$, alors $s_d \circ s_{d'}$ est une translation de vecteur non nul :

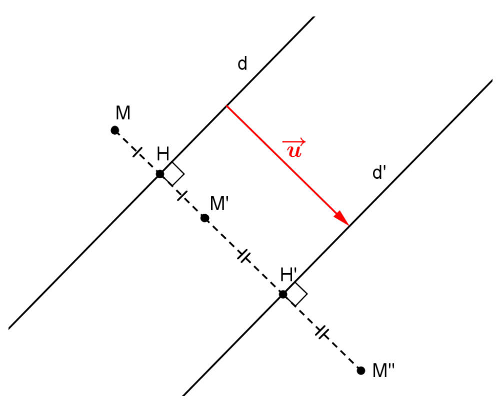

FIGURE 5 – Composée de deux réflexions d'axes parallèles

Soient $M \in d$, $M' = s_d(M)$ et $M'' = s_{d'}(M')$. Soient H le projeté orthogonal de M sur d, H' le projeté orthogonal de M' sur d' (voir FIGURE 5).

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'H'} = \overrightarrow{HH'}$$

donc $M'' = M + \overrightarrow{u} = t_{\vec{u}}(M)$, avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{HH'} \in \overrightarrow{d}^{\perp}$ et $\|\overrightarrow{u}\|$ est égal à la distance entre d et d'.

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $t_{\vec{u}} = id_{\mathcal{E}} = s_d \circ s_d$, d étant une droite quelconque.
Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, soit d une droite de direction $\overrightarrow{u}^{\perp}$. Soit $d' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(d)$. d' est une droite (l'image d'une droite par une application affine est une droite). Alors $t_{\vec{u}} = d_{d'} \circ s_d$ d'après ce qui précède.
(ii) Soient d et d' deux droites sécantes en un point A. $\overrightarrow{s_d}, \overrightarrow{s_{d'}} \in O^-(E)$ donc $\overrightarrow{s_d \circ s_{d'}} = \overrightarrow{s_d} \circ \overrightarrow{s_{d'}} \in O^+(E)$. $\overrightarrow{s_d \circ s_{d'}}$ est donc une rotation vectorielle distincte de l'identité (sinon $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d'}$ et d et d' seraient parallèles). $s_d \circ s_{d'}$ est donc une rotation. Par conséquent, $s_d \circ s_{d'}$ admet un unique point fixe $A \in d'$ donc $s_{d'}(A) = A$. $A \in d$ donc $s_d \circ s_{d'}(A) = s_d(A) = A$. L'unique point fixe de $s_d \circ s_{d'}$ est le point d'intersection de d et d'.
Soit $M \in \mathcal{E} \setminus \{A\}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur d'. Soient $M' = s_{d'}(M)$, $M'' = s_d(M')$ et H' le projeté orthogonal de M' sur d (voir FIGURE 6).

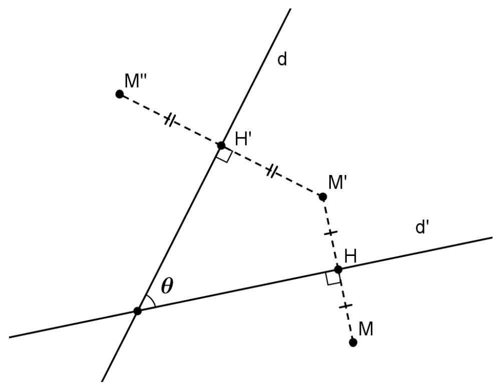

Figure 6 – Composée de deux réflexions d'axes sécants

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = 2(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AM'})$ car $AM = AM'$ donc A appartient à la médiatrice de $[MM']$, qui est donc la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$. De même, $(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) = 2(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AH'})$. On en déduit :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM''}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) + (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) = 2(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AM'}) + 2(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AH'}) = 2(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AH''}) = 2\theta$$

où θ désigne l'angle orienté de droites (d', d). $s_d \circ s_{d'}$ est donc la rotation de centre A et d'angle $2(d', d)$.
Soit r une rotation de centre A et d'angle θ. Soit d une droite passant par A. Soit d' l'image de d par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\theta}{2}$. D'après ce qui précède, $s_{d'} \circ s_d$ est la rotation de centre A et d'angle $2(d, d') = 2 \times \dfrac{\theta}{2} = \theta$. $\square$

Corollaire 2.5

Les réflexions engendrent le groupe des isométries du plan.

Preuve. Les translations et les rotations se décomposent en produit de réflexions donc il en est de même de toutes les isométries du plan. $\square$

3 Isométries conservant une partie

Notation 3.1

$\mathcal{P}$ désigne une partie de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ l'ensemble des isométries laissant $\mathcal{P}$ invariant, c'est-à-dire l'ensemble des isométries f férifiant $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Théorème 3.2

(i) $(\mathcal{I}s(\mathcal{P}), \circ)$ *est un groupe et* $(\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}), \circ)$ *est un sous-groupe de* $(\mathcal{I}s(\mathcal{P}), \circ)$ *;*

(ii) Si $s \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$*, alors l'application* $\psi : \mathcal{I}s^+(\mathcal{P}) \to \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$ *définie par* $f \mapsto s \circ f$ *est bijective. On peut alors écrire* $\mathcal{I}s^-(\mathcal{P}) = s \cdot \mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$*.*

Preuve.
(i) $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$. En effet :
$\mathcal{I}s(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ car $id_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}s(\mathcal{P})$.
$\mathcal{I}s(\mathcal{P}) \subset \mathcal{I}s(\mathcal{E})$.
Soient $f, g \in \mathcal{I}s(\mathcal{P})$. f et g sont bijectives et vérifient $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. On a alors $g^{-1}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. $f \circ g^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ et $f \circ g^{-1}(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ donc $f \circ g^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{P})$. Par suite, $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est bien un sous-groupe de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$.
$\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}) = \mathcal{I}s^+(\mathcal{E}) \cap \mathcal{I}s(\mathcal{P})$. $\mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$ est donc l'intersection de deux sous-groupes de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$. C'est donc un sous-groupe de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$. $\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}) \subset \mathcal{I}s(\mathcal{P})$ donc c'est aussi un sous-groupe de $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$.
(ii) Soit $s \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$. On considère l'application $\psi : \mathcal{I}s^+(\mathcal{P}) \to \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$ définie par $f \mapsto s \circ f$. Soit $f \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$. L'application linéaire associée à f appartient à $O^+(E)$. L'application linéaire associée à s appartient à $O^-(E)$. Par suite, l'application linéaire associée à $s \circ f$ appartient à $O^-(E)$ et donc $s \circ f \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$.
Soient $f, g \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ telles que $\psi(f) = \psi(g)$. Alors $s \circ f = s \circ g$. s étant bijective, on a alors $s^{-1} \circ s \circ f = s^{-1} \circ s \circ g$, c'est-à-dire $f = g$. ψ est donc injective.
Soit $g \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$. Soit $f = s^{-1} \circ g$. $s^{-1} \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$ sinon on aurait $s^{-1} \circ s = id_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$, ce qui est absurde. $s^{-1} \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$ et $g \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$ donc $s^{-1} \circ g = f \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$. On a $s \circ f = g$, c'est-à-dire $\psi(f) = g$. ψ est donc surjective. Par conséquent, ψ est bijective. □

Théorème 3.3

Si $\mathcal{P}$ *est une partie finie du plan de cardinal* $n \geqslant 2$*, alors le groupe* $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ *est fini et on a* $\mathrm{card}(\mathcal{I}s^+(\mathcal{P})) \leqslant n$ *et* $\mathrm{card}(\mathcal{I}s(\mathcal{P})) \leqslant 2n$*.*

Preuve.
Soit $\mathcal{P}$ une partie finie du plan, de cardinal $n \geqslant 2$. Soit O l'isobarycentre des points de $\mathcal{P}$. Soit $f \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$. f étant affine, f conserve l'isobarycentre donc $f(O)$ est l'isobarycentre des points de de $f(\mathcal{P})$. Or $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ donc $f(O) = O$. f est un déplacement ayant un point fixe donc f est une rotation. Soit A un point de $\mathcal{P}$, distinct de O. Une rotation est entièrement déterminée par son centre etl'image d'un autre point, en l'occurrence le point A. $\mathcal{P}$ étant de cardinal n, il y a donc n choix possibles pour $f(A)$. Par conséquent, $\mathrm{card}(\mathcal{I}s^+(\mathcal{P})) \leqslant n$. Si $\mathcal{I}s^-(\mathcal{P}) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{I}s^-(\mathcal{P})$ et $\mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$ sont en bijection (théorème précédent) donc $\mathrm{card}(\mathcal{I}s^-(\mathcal{P})) \leqslant n$ et donc $\mathrm{card}(\mathcal{I}s(\mathcal{P})) \leqslant 2n$. □

Théorème 3.4

Soit $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$ une partie finie de $\mathcal{E}$.

(i) L'application $\phi : \mathcal{I}s(\mathcal{P}) \to \mathcal{S}_n$ définie par $f \mapsto \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ f(A_1) & f(A_2) & \dots & f(A_n) \end{pmatrix}$ est un homomorphisme de groupes ;

(ii) Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace affine engendré par les points $A_1, \dots, A_n$.
Si $\mathcal{A} = \mathcal{E}$, alors ϕ est injective, $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est fini, isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ et de cardinal un diviseur de $n!$.
Si $\mathcal{A}$ est un hyperplan, alors $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$est fini et de cardinal $2d$, où d est un diviseur de $n!$.
Dans tous les autres cas, $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est infini.

Preuve.

Soit $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$ une partie finie de $\mathcal{E}$.
(i) Soient $f, g \in \mathcal{I}s(\mathcal{P})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$. Comme $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{P})$, $\phi(f) \in S_n$.

$$\phi(f \circ g)(A_i) = f \circ g(A_i) = f(g(A_i)) = f(\phi(g(A_i)) = \phi(f) \circ \phi(g)(A_i).$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\phi(f \circ g) = \phi(f) \circ \phi(g)$.
(ii) Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace affine engendré par les points $A_1, \dots, A_n$.
Supposons $\mathcal{A} = \mathcal{E}$. ϕ est alors injective : soient $f, g \in \mathcal{P}$ telles que $\phi(f) = \phi(g)$. Alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $f(A_i) = g(A_i)$. En particulier, sachant que $\mathcal{A}$ contient un repère affine de $\mathcal{E}$, f et g coïncident sur chaque point de ce repère affine. Par suite, $f = g$ et ϕ est injective. Il en résulte que $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$. L'ordre d'un sous-groupe divisant l'ordre du groupe, $\mathcal{I}s(\mathcal{P})$ est fini, de cardinal un diviseur de $n!$.
Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$. Soit δ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ supplémentaire et orthogonal à $\mathcal{A}$ et passant par O, isobarycentre de $A_1, \dots, A_n$. Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{P})$. f est entièrement déterminée par $f_{|A}$ et $f_{|\delta}$. Le nombres d'isométries $f_{|\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ laissant $\mathcal{P}$ invariant est un diviseur d de $n!$. Il y a deux isométries de δ : id_δ et $-id_\delta$. On a alors $\mathrm{card}(\mathcal{I}s(\mathcal{P})) = 2d$.
Si on n'est pas dans un des deux cas précédents, notons $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par O et orthogonal à $\mathcal{A}$. $\mathcal{F}$ est de dimension supérieure ou égale à 2. Si $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{P})$, alors $f_{|\mathcal{F}}$ est une isométrie de $\mathcal{F}$ et il y en a une infinité. $\square$

Définition 3.5

Soient n points $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$. On note $A_k = A_j$ si $k \equiv j \pmod n$. On suppose que 3 points consécutifs A_i, A_{i+1}, A_{i+2} quelconques ne sont pas alignés. On appelle polygone $\mathcal{P}$ de sommets $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ la famille de segments $[A_0A_1], [A_1A_2], \dots [A_{n-2}A_{n-1}], [A_{n-1}A_0]$. On note par commodité $\mathcal{P} = A_0A_2 \dots A_{n-1}$. Les points $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ sont appelés sommets du polygone $\mathcal{P}$ et les segments $[A_iA_{i+1}]$ sont appelés arêtes du polygone.

Théorème 3.6

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et $\mathcal{P}_n = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ un polygone. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{P}_n$ est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et pour tout $k \in N$, $A_kA_{k+1} = A_0A_1$;

(ii) Il existe une rotation r telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r(A_k) = A_{k+1}$.

Preuve.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On suppose qu'il existe une rotation r telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r(A_k) = A_{k+1}$. Une récurrence immédiate montre que pour entier naturel k, $r^k(A_0) = A_k$ et $r^k(A_1) = A_{k+1}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. r^k est une rotation

donc une isométrie donc $A_kA_{k+1} = r^k(A_0)r^k(A_1) = A_0A_1$. Soit O l'isobarycentre des points $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$. r est affine donc r conserve les barycentres. Comme $r(\{A_0, \dots, A_{n-1}\}) = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$, on en déduit que $r(O) = O$. O étant un point fixe de la rotation r, il est donc le centre de cette rotation. Par suite, $OA_0 = OA_1 = \dots = OA_{n-1}$ et donc le polygone $\mathcal{P}_n$ est inscrit dans le cercle de centre O passant par A_0.
$(i) \Rightarrow (ii)$ On suppose maintenant que $\mathcal{P}_n$ est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et que pour tout entier naturel k, $A_kA_{k+1} = A_0A_1$. Notons O le centre de ce cercle $\mathcal{C}$. Pour tout entier k, notons θ_k une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}})$. D'après légalité d'Al Kashi :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A_kA_{k+1}^2 = OA_k^2 + OA_{k+1}^2 - 2 \cdot OA_k \cdot A_{k+1} \cdot \cos\theta_k.$$

En notant R le rayon du cercle $\mathcal{C}$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \cos\theta_k = \frac{2R^2 - A_kA_{k+1}^2}{2R^2} = \frac{2R^2 - A_0A_1^2}{2R^2} = \cos\theta_0.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\theta_k = \pm\theta_0 \pmod{2\pi}$.
Supposons qu'il existe un entier k tel que $\theta_k = -\theta_0$. Soit $j = \min\{k \in [\![0\,;n]\!],\ \theta_k = -\theta_0\}$. Alors $\theta_j = -\theta_0$ et $\theta_{j-1} = \theta_0$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{OA_j}, \overrightarrow{OA_{j+1}}) = -\theta_0 = -(\overrightarrow{OA_{j-1}}, \overrightarrow{OA_j})$. Alors $(\overrightarrow{OA_{j-1}}, \overrightarrow{OA_{j+1}}) = 0$. Sachant que $OA_{j-1} = OA_{j+1}$, cela implique $A_{j-1} = A_{j+1}$, ce qui est impossible. Par suite, pour tout entier k, $\theta_k = \theta_0 \pmod{2\pi}$ et $r(A_k) = A_{k+1}$, r étant la rotation de centre O et d'angle θ_0. □

Définition 3.7

Un polygone $\mathcal{P}_n$ vérifiant l'une des conditions du théorème précédent est appelé polygone régulier.

Théorème 3.8

Soit $\mathcal{P}_n$ un polygone régulier à n côtés.
- *(i) $\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}_n) = \{id_{\mathcal{E}}, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$, où r est la rotation définie dans le théorème précédent ;*
- *(ii) Il y a exactement n réflexions laissant $\mathcal{P}_n$ invariant : ce sont les réflexions d'axes (OA_k) et les médiatrices des arêtes $[A_kA_{k+1}]$, $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.*

Preuve. Soit $\mathcal{P}_n$ un polygone régulier à n côtés.
(i) Soit r une rotation telle que $r(A_k) = A_{k+1}$ pour tout entier naturel k.

$$\forall m, k \in \mathbb{N},\ r^m(A_k) = r^m(r^k(A_0)) = r^{m+k}(A_0) = A_{m+k}.$$

Par conséquent, pour tout $m \in [\![0\,;n-1]\!]$, $r^m \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{P}_n)$ donc $\{id_{\mathcal{E}}, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \subset \mathcal{I}s^+(\mathcal{P}_n)$. Soit $\rho \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{P}_n)$. Alors $\rho(A_0) \in \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$. Il existe $m \in [\![0\,;n-1]\!]$ el que $\rho(A_0) = A_m = r^m(A_0)$. Par ailleurs, $\rho(O) = O$ par conservation de l'isobarycentre. ρ et r^m ont le même centre et la même image pour A_0. On en déduit que $\rho = r^m$ (on rappelle qu'une rotation est entièrement déterminée par son centre et l'image d'un point autre que le centre). Par suite, $\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}_n) \subset \{id_{\mathcal{E}}, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ et donc $\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}_n) = \{id_{\mathcal{E}}, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$
(ii) Pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons $s_{(OA_k)}$ la réflexion d'axe (OA_k), Δ_k la médiatrice de $[A_kA_{k+1}]$ et s_{Δ_k} la réflexion d'axe Δ_k. Remarquons que si r est une rotation de centre O et s une réflexion d'axe passant par O, alors $s \circ r = r^{-1} \circ s$. En effet, $s \circ r$ est un antidéplacement ayant un point fixe donc c'est une réflexion et donc $s \circ r \circ s \circ r = id_{\mathcal{E}}$. En composant à gauche (ou à droite) par $r^{-1} \circ s$, on a $s \circ r = r^{-1} \circ s$. Soit $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.

$$\forall k \in [\![0\,;n-1]\!],\ A_j = r^j(A_0) = r^j(r^{-k}(A_k)) = r^{j-k}(A_k).$$

Soit $j \in [\![0\,;n-1]\!]$.

$$s_{(OA_k)}(A_j) = s_{(OA_k)}(r^{j-k}(A_k)) = r^{k-j}(s_{(OA_k)}(A_k)) = r^{k-j}(A_k) = A_{2k-j}$$

donc $s_{(OA_k)}(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}_n$ et donc $s^2_{(OA_k)}(\mathcal{P}_n) \subset s_{(OA_k)}(\mathcal{P}_n)$, c'est-à-dire $\mathcal{P}_n \subset s_{(OA_k)}(\mathcal{P}_n)$.
On a donc $s_{(OA_k)}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n$.
Soit $j \in [\![0\,;n-1]\!]$.

$$s_{\Delta_k}(A_j) = s_{\Delta_k}(r^{j-k}(A_k)) = r^{k-j}(s_{\Delta_k}(A_k)) = r^{k-j}(A_{k+1}) = A_{2k+1-j}.$$

On a ainsi $s_{\Delta_k}(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}_n$ et donc $s_{\Delta_k}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n$.
Pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons $s_k = s_{(OA_0)} \circ r^k$.
D'après le premier théorème de ce paragraphe, $\mathcal{I}s^-(\mathcal{P}_n) = s_{(OA_0)}\mathcal{I}s^+(\mathcal{P}_n) = \{s_{(OA_0)} \circ r^k,\ k \in [\![0\,;n-1]\!]\}$.
Soit $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. Soit D_k l'ade de la réflexion s_k. On a $s_k = s_{(OA_0)} \circ r^k$. En composant à gauche par $s_{(OA_0)}$, on obtient $r^k = s_{(OA_0)} \circ s_k$. L'angle de la rotation r^k est $k\theta$ et celui de $s_{(OA_0)} \circ s_k$ est $2((OA_0), D_k)$ donc $k\theta = 2((OA_0), D_k) \pmod{2\pi}$ et donc $((OA_0), D_k) = \dfrac{k\theta}{2} \pmod{\pi}$.
Si k est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$ et donc $((OA_0), D_k) = \theta p \pmod{\pi}$. Alors $D_k = (OA_k)$.
Si k est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p+1$ et donc $((OA_0), D_k) = p\theta + \dfrac{\theta}{2} \pmod{\pi}$. Alors $D_k = \Delta_k$. $\square$