Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications

Dans toute cette leçon, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Différentes formules de Taylor

Théorème 1.1 (*Formule de Taylor avec reste intégral*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I.

$$\forall a, x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.2 (*Inégalité de Taylor-Lagrange*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I.

$$\forall a, x \in I, \quad \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in I} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

Théorème 1.3 (*Formule de Taylor-Young*)

Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$. Alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Théorème 1.4 (*Formule de Taylor-Lagrange*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a\,;b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a\,;b[$, alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

2 Applications

2.1 Obtention d'inégalités

Exemple 2.1

$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$
$$\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{2}], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

2.2 Développements limités

Définition 2.2

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0, sauf peut-être en zéro, admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\,.$$

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir les développements limités usuels.

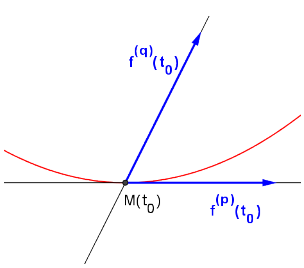
Exemple 2.3

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)\,.$$

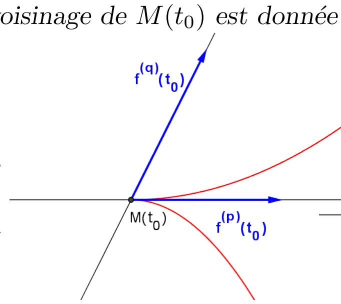
2.3 Etude de points stationnaires d'arcs paramétrés

Théorème 2.4

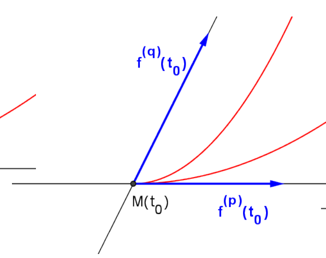
Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ et $t_0 \in I$. On suppose que parmi les $f^{(n)}(t_0)$, $n \leqslant k$, il en existe deux non colinéaires.
Soient $p = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(t_0) \neq 0\}$ et $q = \min\{n \geqslant p+1,\ f^{(n)}(t_0)$ et $f^{(p)}(t_0)$ non colinéaires$\}$.
L'allure de la courbe au voisinage de $M(t_0)$ est donnée par :



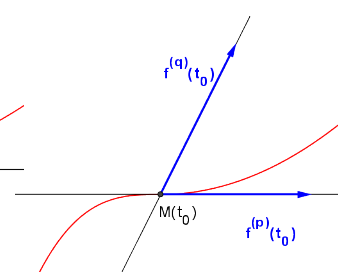
p impair, q pair
Point ordinaire



p pair, q impair
Point de rebroussement de 1ère espèce



p pair, q pair
Point de rebroussement de 2ème espèce



p impair, q impair
Point d'inflexion

Dans tous les cas, $f^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe en $M(t_0)$.

Exemple 2.5

On s'intéresse dans cet exemple à l'arc paramétré défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = 2 - 2\cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

Déterminer la nature du point stationnaire $M(0) = (-1; 0)$.

2.4 Fonctions développables en série entière

Définition 2.6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière sur $]-r\,;r[$, où $r > 0$ avec $]-r\,;r[\subset I$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que pour tout $x \in\,]-r\,;r[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Théorème 2.7

Soir $r > 0$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-r\,;r[$. f est développable en série entière sur $]-r\,;r[$ si et seulement si

$$\forall x \in\,]-r\,;r[, \quad f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Remarque 2.8

On peut obtenir des développement en série entière de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ en étudiant les restes de Taylor.

Exemple 2.9

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2.5 Méthode de Newton pour les suites récurrentes

Théorème 2.10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a\,;b])$ telle que $f(a)f(b) < 0$, f' ne s'annule pas sur $]a\,;b[$ et f'' est de signe constant sur $[a\,;b]$.

(i) f admet un unique zéro sur $]a\,;b[$ noté α ;

(ii) Soit $u_0 \in [\alpha\,;b[$ si ($f' > 0$ et $f'' \geqslant 0$) ou ($f' < 0$ et $f'' \leqslant 0$), $u_0 \in]a\,;\alpha]$ si ($f' < 0$ et $f'' \geqslant 0$)ou ($f' > 0$ et $f'' \leqslant 0$). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

est définie et converge ver α ;

(iii) Soient $m_1 = \inf\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant |u_0 - \alpha|^{2^n} \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n - 1}.$$

2.6 Valeur approchée d'intégrale par la méthode des rectangles

Théorème 2.11

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, avec $a < b$. On note $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$|I - R_n| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x\in[a;b]} |f'(x)|.$$