# Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications

Dans toute cette leçon, $I$ désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. $E$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Différentes formules de Taylor

**Théorème 1.1 (*Formule de Taylor avec reste intégral*)**

*Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur $I$.*

$$\forall a, x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

**Preuve**.
Effectuons la démonstration par récurrence sur $n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}(n)$ l'énoncé du théorème.
Pour $n = 0$ : soit $f : I \to E$ une fonction continue sur $I$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $I$. Soient $a, x \in I$.

$$\frac{(x-a)^0}{0!} f^{(0)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$

$\mathcal{H}(0)$ est donc vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$sur $I$ et de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ par morceaux sur $I$. Soient $a, x \in I$. $f$ satisfait les hypothèses du théorème au rang $n$ donc $\mathcal{H}(n)$ permet d'écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

$t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $I$. On peut donc utiliser le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{(n+1)!} \left[(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$. □

**Théorème 1.2 (*Inégalité de Taylor-Lagrange*)**

*Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur $I$.*

$$\forall a, x \in I, \quad \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in I} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

**Preuve**.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur $I$. $f$ satisfait donc aux hypothèses du théorème précédent. De plus, $f^{(n+1)}$ est continue par morceaux sur $I$ donc pour tout $t \in I$, $\left\| f^{(n+1)}(t) \right\| \leqslant \sup_{x \in I} \left\| f^{(n+1)}(x) \right\|$. Soient $a, x \in I$.

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \right\| \leqslant \sup_{t \in I} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\| \times \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{d}t \right| \\ &= \sup_{t \in I} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\| \times \left| \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x \right| = \sup_{t \in I} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\| \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 1.3 (*Formule de Taylor-Young*)**

*Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et $a \in I$. Alors :*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

**Preuve**.

Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Soit $a \in I$. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral au rang $n-1$ :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. $f^{(n)}$ est continue en $a$ donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]a-\eta\,; a+\eta[, \ \left\| f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \right\| < \varepsilon.$$

Soit $x \in I$ tel que $x \in ]a-\eta\,; a+\eta[$.

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right\| \\ &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) \mathrm{d}t \right\| \\ &\leqslant \varepsilon \left| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}t \right| = \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n!} \end{aligned}$$

donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$. □

**Théorème 1.4 (*Formule de Taylor-Lagrange*)**

*Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a\,;b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a\,;b[$, alors il existe $c \in\, ]a\,;b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

**Preuve**.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $n \in \mathbb{N}$. soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a\,;b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a\,;b[$. Soit $g$ la fonction définie sur $[a\,;b]$ par :

$$\forall x \in [a\,;b], \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

$g(b) = f(b)$. On choisit $A$ tel que $g(a) = g(b) = f(b)$. $g$ est alors une fonction continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ telle que $g(a) = g(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in\, ]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in\, ]a\,;b[, \quad g'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \frac{A}{n!}(b-x)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{A}{n!}(b-x)^n \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{A}{n!}(b-x)^n \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!}(f^{(n+1)}(x) - A).
\end{aligned}$$

$g'(c) = 0$ impose $A = f^{(n+1)}(c)$. Pour $x = a$, on a alors

$$f(b) = g(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

□

# 2 Applications

## 2.1 Obtention d'inégalités

**Exemple 2.1**

$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{2}], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

**Preuve**.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \ln(1+x)$. $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à tout ordre.

$$\forall x \geqslant 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}.$$

On en déduit $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$ et $f^{(4)}(0) = -6$.
Soit $x \geqslant 0$. On applique la formule de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 2 : il existe $c_1 \in ]0\,;x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(c_1)}{6}x^3$$

c'est-à-dire

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{(1+c_1)^3}x^3.$$

$\dfrac{2}{(1+c_1)^3} \geqslant 0$ donc $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.
En appliquant la formule de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 3 : il existe $c_2 \in ]0\,;x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(c_2)}{24}x^4$$

c'est-à-dire

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4(1+c_2)^4}.$$

$-\dfrac{1}{4(1+c_2)^4} \leqslant 0$ donc $\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.
On a ainsi montré le premier encadrement.
sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$donc on peut appliquer la formule de TAYLOR-LAGRANGE à tout ordre.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos x,\ \sin''(x) = -\sin x,\ \sin'''(x) = -\cos x,\ \sin^{(4)}(x) = \sin x,\ \sin^{(5)}(x) = \cos x,$$
$$\sin^{(6)}(x) = -\sin x,\ \sin^{(7)}(x) = -\cos(x).$$

On en déduit :

$$\sin'(0) = 1,\ \sin''(0) = 0,\ \sin'''(0) = -1,\ \sin^{(4)}(0) = 0,\ \sin^{(5)}(0) = 1,\ \sin^{(6)}(0) = 0.$$

Soit $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$. En appliquant la formule de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 5, il existe $c_1 \in ]0\,;x[$ tel que

$$\sin x = \sin 0 + \sin'(0)x + \sin''(0)\frac{x^2}{2} + \sin'''(0)\frac{x^3}{6} + \sin^{(4)}(0)\frac{x^4}{24} + \sin^{(5)}(c_1)\frac{x^5}{120} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos c_1}{120}x^5.$$

$c_1 \in ]0\,;\frac{\pi}{2}[$ donc $\dfrac{\cos c_1}{120}x^5 \geqslant 0$ et donc $\sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$.
En appliquant la formule de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 7, il existe $c_2 \in ]0\,;x[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cos(c_2)\frac{x^7}{7!}.$$

$-\cos(c_2)\dfrac{x^7}{7!} \leqslant 0$ donc $\sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.
On a ainsi montré le deuxième encadrement. □

## 2.2 Développements limités

**Définition 2.2**

*Une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ contenant 0, sauf peut-être en zéro, admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\,.$$

La formule de TAYLOR-YOUNG permet d'obtenir les développements limités usuels.

**Exemple 2.3**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)\,.$$

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}(n)$ la propriété

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = n!(1-x)^{-(n+1)}.$$

$\mathcal{H}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f^{(n)})(x) = -\frac{n!(n+1)\times(-1)(1-x)^{(n+1)-1}}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.$$

$\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie.
D'après le principe de récurrence, on en déduit sur $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'après ce qui précède, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = n!.$$

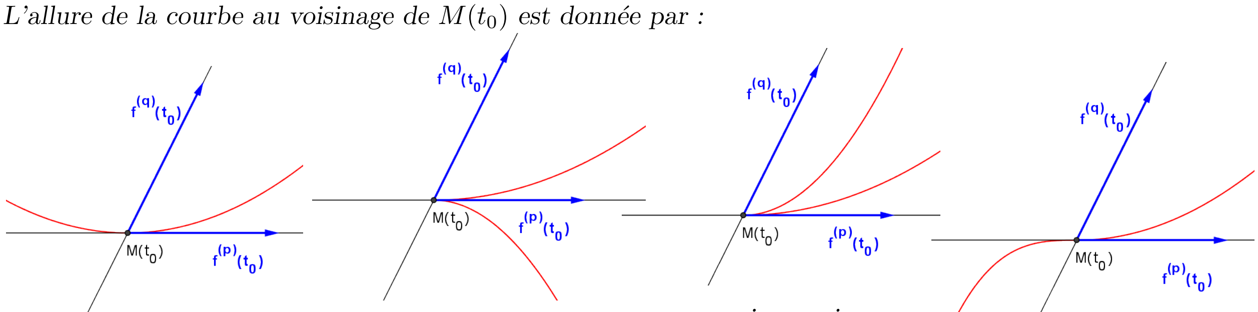
Soit $n \in \mathbb{N}$. $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-1\,;1[$ et $0 \in\, ]-1\,;1[$. D'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} k! + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)\,.$$

## 2.3 Etude de points stationnaires d'arcs paramétrés

**Théorème 2.4**

*Soit $(I, f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ et $t_0 \in I$. On suppose que parmi les $f^{(n)}(t_0)$, $n \leqslant k$, il en existe deux non colinéaires.*
*Soient $p = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(t_0) \neq 0\}$ et $q = \min\{n \geqslant p+1,\ f^{(n)}(t_0)$ et $f^{(p)}(t_0)$ non colinéaires$\}$.*
*L'allure de la courbe au voisinage de $M(t_0)$ est donnée par :*




*$p$ impair, $q$ pair — Point ordinaire*

*$p$ pair, $q$ impair — Point de rebroussement de 1ère espèce*

*$p$ pair, $q$ pair — Point de rebroussement de 2ème espèce*

*$p$ impair, $q$ impair — Point d'inflexion*

*Dans tous les cas, $f^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe en $M(t_0)$.*

**Preuve**.
Soit $(I, f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ et $t_0 \in I$. On suppose que parmi les $f^{(n)}(t_0)$, $n \leqslant k$, il en existe deux non colinéaires.

Soient $p = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(t_0) \neq 0\}$ et $q = \min\{n \geqslant p+1,\ f^{(n)}(t_0)$ et $f^{(p)}(t_0)$ non colinéaires$\}$.
Appliquons la formule de Taylor-Young à l'ordre $p$ : il existe une application $\varepsilon_1 : I \to \mathbb{R}^2$ telle que, au voisinage de $t_0$ :

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{n=1}^{p} \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon_1(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon_1(t),$$

avec $\varepsilon_1(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$.
Soit $t \in I$, $t \neq t_0$.

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{M(t_0)M(t)} = \frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|} = \frac{\frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon_1(t)}{\left\| \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon_1(t) \right\|} = \frac{\frac{(t-t_0)^p}{p!} \left(f^{(p)}(t_0) + p!\varepsilon_1(t)\right)}{\left\| \frac{(t-t_0)^p}{p!} \left(f^{(p)}(t_0) + p!\varepsilon_1(t)\right) \right\|}.$$

Cette dernière quantité tend vers $\pm \dfrac{f^{(p)}(t_0)}{\left\|f^{(p)}(t_0)\right\|}$ lorsque $t$ tend vers $t_0$. $f^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ donc $f^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe en $M(t_0)$.
Appliquons maintenant la formule de Taylor-Young à l'ordre $q$ : il existe une application $\varepsilon_2 : I \to \mathbb{R}^2$ telle que, au voisinage de $t_0$ :

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{n=p}^{q} \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_2(t),$$

avec $\varepsilon_2(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$.
Par définition de $q$, pour tout $n \in [\![p+1\,;q-1]\!]$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(t_0) = \lambda_n f^{(p)}(t_0)$ donc

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \sum_{n=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \lambda_n f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_2(t).$$

L'égalité ci-dessus s'écrit aussi :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) \left(1 + \sum_{n=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^{n-p}}{(p+1)\dots(n-1)n} \lambda_n \right) + (t-t_0)^q \left( \frac{f^{(q)}(t_0)}{q!} + \varepsilon_2(t) \right).$$

Pour $t \in I$, notons $(X(t);Y(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$. Pour $t$ voisin de $t_0$, $X(t)$ est du signe de $(t-t_0)^p$ et $Y(t)$ est du signe de $(t-t_0)^q$. Suivant la parité de $p$ et $q$ et suivant que $t < t_0$ ou $t > t_0$, on obtient la classification annoncée. □

**Exemple 2.5**

*On s'intéresse dans cet exemple à l'arc paramétré défini par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = 2 - 2\cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

*Déterminer la nature du point stationnaire $M(0) = (-1;0)$.*

On a

$$x(t) = 2 - 2\cos t - \cos(2t) = 2 - 2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o\big(t^3\big)\right) - \left(1 - \frac{4t^2}{2} + o\big(t^3\big)\right) = -1 + 3t^2 + o\big(t^3\big)$$

et

$$y(t) = 2\sin t - \sin(2t) = 2\left(t - \frac{t^3}{6} + o\big(t^3\big)\right) - \left(2t - \frac{8t^3}{6} + o\big(t^3\big)\right) = t^3 + o\big(t^3\big).$$

En utilisant les notations du théorème, on a $p = 2$ et $q = 3$. $M(0)$ est donc un point de rebroussement de première espèce et la tangente en ce point est dirigée par $6\overrightarrow{e_1}$.

## 2.4 Fonctions développables en série entière

**Définition 2.6**

*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que $f$ est développable en série entière sur $]-r\,;r[$, où $r > 0$ avec $]-r\,;r[\ \subset I$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que pour tout $x \in\ ]-r\,;r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

**Théorème 2.7**

*Soir $r > 0$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-r\,;r[$. $f$ est développable en série entière sur $]-r\,;r[$ si et seulement si*

$$\forall x \in\ ]-r\,;r[,\quad f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**Preuve**.
Soir $r > 0$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$.
Supposons $f$ développable en série entière sur $]-r\,;r[$. Il existe alors une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que pour tout $x \in\ ]-r\,;r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Une récurrence immédiate montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in\ ]-r\,;r[,\ f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!}x^k.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = a_n n!$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Par suite, pour tout $x \in\ ]-r\,;r[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Pour $x \in\ ]-r\,;r[$, on a alors (reste d'ordre $n$ d'une série convergente) :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Réciproquement, supposons que

$$\forall x \in\ ]-r\,;r[,\quad f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$f$ est donc, par définition, développable en série entière sur $]-r\,;r[$. □

**Remarque 2.8**

*On peut obtenir des développement en série entière de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ en étudiant les restes de* Taylor.

**Exemple 2.9**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$. $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x\,.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ ($I = [0\,;x]$ ou $[x\,;0]$ suivant le signe de $x$), $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathring{I}$. Il existe donc $c \in \mathring{I}$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

On en déduit

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^c\,.$$

$\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^c \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f$ est développable en série entière et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, le rayon de convergence de cette série entière étant infini.

## 2.5 Méthode de Newton pour les suites récurrentes

**Théorème 2.10**

*Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a\,;b])$ telle que $f(a)f(b) < 0$, $f'$ ne s'annule pas sur $]a\,;b[$ et $f''$ est de signe constant sur $[a\,;b]$.*

*(i) $f$ admet un unique zéro sur $]a\,;b[$ noté $\alpha$ ;*

*(ii) Soit $u_0 \in [\alpha\,;b[$ si ($f' > 0$ et $f'' \geqslant 0$) ou ($f' < 0$ et $f'' \leqslant 0$), $u_0 \in\, ]a\,;\alpha]$ si ($f' < 0$ et $f'' \geqslant 0$)ou ($f' > 0$ et $f'' \leqslant 0$). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

*est définie et converge ver $\alpha$ ;*

*(iii) Soient $m_1 = \inf\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$. On a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant |u_0 - \alpha|^{2^n} \left( \frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1}.$$

**Preuve**.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a\,;b])$ telle que $f(a)f(b) < 0$, $f'$ ne s'annule pas sur $]a\,;b[$ et $f''$ est de signe constant sur $[a\,;b]$.

$(i)$ $f$ est continue sur $[a\,;b]$ et $f(a)f(b) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in\, ]a\,;b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. $f'$ ne s'annule pas sur $]a\,;b[$ donc $f$ est strictement monotone sur cet intervalle, ce qui assure l'unicité de $\alpha$.

$(ii)$ Nous allons faire la démonstration dans le cas où $f' > 0$ et $f'' \geqslant 0$.

Soit $u_0 \in [\alpha\,;b[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Montrons que la suite $(u_n)$ est bien définie. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}(n)$ la propriété : $\alpha \leqslant u_n \leqslant u_0$.

$\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. L'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ en $x = u_n$ est

$$y - f(u_n) = f'(u_n)(x - u_n).$$

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en $x = -\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} + u_n = u_{n+1}$. $f'' \geqslant 0$ donc $f$ est convexe et donc $f(u_{n+1}) \geqslant 0$ (car la courbe représentative de $f$ est située au dessus de toutes ses tangentes). $f$ étant strictement croissante sur $[a\,;b]$ et $f(\alpha) = 0$, on en déduit $u_{n+1} \geqslant \alpha$. $f$ est croissante donc $f(u_n) \geqslant f(\alpha)$, c'est-à-dire $f(u_n) \geqslant 0$. $f'(u_n) > 0$ donc $\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leqslant u_n \leqslant u_0$. Par suite $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)$ est donc bien définie. On a même montré qu'elle est décroissante. $(u_n)$ est une suite décroissante et minorée par $\alpha$ donc $(u_n)$ converge. Notons $\ell$ sa limite. $g : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est continue donc $\ell$ est un point fixe de cette fonction donc $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, soit $f(\ell) = 0$. Par unicité du zéro de $f$, $\ell = \alpha$. $(u_n)$ converge donc vers $\alpha$.

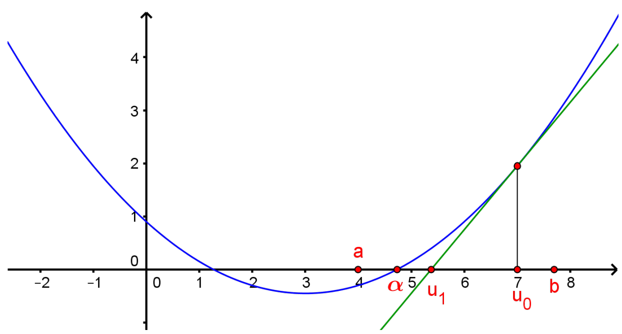



Figure 1 – Méthode de Newton

*(iii)* $f$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$, $|f'|$ et $|f''|$ sont continues sur $[a\,;b]$ donc $f'$ et $f''$ sont bornées sur $[a\,;b]$ et atteignent leurs bornes. $m_1 = \inf\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$ sont donc bien définis. Soit $x \in [\alpha\,;b]$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur $[\alpha\,;x]$. Il existe $c_x \in ]\alpha\,;x[$ tel que

$$f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(\alpha-x)^2}{2} f''(c_x).$$

$f(\alpha) = 0$. En divisant par $f'(x) > 0$, on obtient :

$$0 = \frac{f(x)}{f'(x)} + \alpha - x + \frac{(\alpha-x)^2}{2}\frac{f''(c_x)}{f'(x)}.$$

On en déduit :

$$\left| x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha \right| = \frac{|\alpha - x|^2}{2}\frac{f''(c_x)}{f'(x)} \leqslant \frac{M_2}{2m_1}|\alpha - x|^2.$$

La majoration est vraie pour tout $x \in [\alpha\,;b]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_{n+1} - \alpha| = |g(u_n) - \alpha| = \left| u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} - \alpha \right| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}|\alpha - u_n|^2.$$

Une récurrence immédiate montre qu'alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant |u_0 - \alpha|^{2^n}\left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n - 1}.$$

□

## 2.6 Valeur approchée d'intégrale par la méthode des rectangles

**Théorème 2.11**

*Soit $f$ une fonction continue sur $[a\,;b]$, avec $a<b$. On note $I=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note*

$$R_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

*Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a*

$$|I-R_n|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}\sup_{x\in[a;b]}|f'(x)|\,.$$

**Preuve**.

Soit $f$ une fonction continue sur $[a\,;b]$, avec $a<b$. On note $I=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Analysons la méthode à un pas : on approxime $I$ par $R_1=(b-a)f(a)$ (c'est-à-dire l'aire d'un rectangle de dimensions $(b-a)$ sur $f(a)$. On a

$$|I-R_1|=\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b-a)f(a)\right|=\left|\int_a^b (f(t)-f(a))\mathrm{d}t\right|.$$

Notons $M_1=\displaystyle\sup_{x\in[a;b]}|f'(x)|$. $f$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$, on a (d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange) :

$$\forall t\in[a\,;b],\ |f(t)-f(a)|\leqslant(t-a)M_1.$$

On en déduit :

$$\left|\int_a^b (f(t)-f(a))\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|f(t)-f(a)|\,\mathrm{d}t\leqslant M_1\int_a^b(t-a)\mathrm{d}t=M_1\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^b=M_1\frac{(b-a)^2}{2}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $k\in[\![0\,;n-1]\!]$, notons $a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

$$I-R_n=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(t)\mathrm{d}t-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}(f(t)-f(a_k))\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$|I-R_n|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}(f(t)-f(a_k))\mathrm{d}t\right|.$$

D'après la méthode à un pas :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}(f(t)-f(a_k))\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\sup_{x\in[a_k;a_{k+1}]}|f'(x)|\leqslant\frac{M_1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2.$$

On en déduit :

$$|I-R_n|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2=\frac{M_1(b-a)^2}{2n^2}\times n=\frac{(b-a)^2}{2n}M_1.$$

□