Développement d'une fonction en série entière. Exemples et applications

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $B(0;R)$ désignera la boule ouverte de centre 0 et de rayon $R>0$.

1 Généralités

Définition 1 *Soit f une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$ et un voisinage V de 0 tels que :*

$$\forall x \in V \cap B(0;R), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Si $z_0 \in \mathbb{K}$, on dit que f est développable en série entière en z_0 s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$ et un voisinage V de z_0 tels que :

$$\forall z \in V \cap B(z_0;R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Remarque : Si $z_0 \in \mathbb{K}$, alors f admet un développement en série entière en z_0 si et seulement si la fonction g définie sur $\mathbb{K}$ par $g(z) = f(z+z_0)$ admet un développement en série entière en 0. C'est la raison pour laquelle nous nous intéresserons dans la suite aux développements en série entière en 0.

2 Séries de Taylor

Proposition 1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, développable en série entière en 0. Il existe un voisinage V de 0 et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$ telle que :*

$$\forall x \in V \cap]-R;R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $V\cap]-R;R[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Preuve - Notons S la fonction somme. S est définie sur $]-R;R[$ par :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$

On sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

(voir le chapitre sur les séries entières). f et S coïncident sur $V\cap]-R;R[$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $V\cap]-R;R[$ et on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

□

Définition 2 *Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, développable en série entière en 0, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est appelée série de Taylor de f en 0.*

Remarque : La réciproque de la proposition 1 est fausse. En effet, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\text{ si }x\neq 0\\ 0\text{ si }x=0\end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \exists P_n\in\mathbb{R}[X],\quad x\in\mathbb{R}^*,\quad f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $Pr(n)$ la propriété :

$$\exists P_n\in\mathbb{R}[X],\quad x\in\mathbb{R}^*,\quad f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$n=0$: $P_0=1$ donc $Pr(0)$ est vraie ;

$n=1$: f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

donc $P_1=2$ et donc $Pr(1)$ est vraie ;

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $Pr(n)$ vraie :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{n^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}*,\quad f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{x^3P_n'(x)+3nx^2P_n(x)+2P_n(x)}{x^{3(n+1)}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Donc $Pr(n+1)$ est vraie et donc $Pr(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n, $f^{(n)}$ est continue en 0, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et $f^{(n+1)}$ admet 0 pour limite en 0 donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Par conséquent, f admet 0 comme développement en série de Taylor en 0, mais f ne s'annulant qu'en 0, il n'existe pas de voisinage V de 0 tel que :

$$\forall x \in V, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Proposition 2 *Soient V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, f une fonction de V dans $\mathbb{K}$ admettant un développement en série entière en 0, noté $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$.*

- *Si f est paire, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+1} = 0$;*
- *Si f est impaire, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = 0$.*

Preuve - Notons R le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$. On a :

$$\forall x \in V \cap]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soit I un intervalle sentré en 0, inclus dans $V \cap]-R; [R[$. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(-x)$. On a :

$$\forall X \in I, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n.$$

Si f est paire, alors $f = g$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n.$$

Le développement en série entière étant unique, on en déuit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n a_n = a_n.$$

Pour n impair, on a alors $-a_n = a_n$, c'est-à-dire $a_n = 0$.

Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = -f(-x)$. On a :

$$\forall x \in I, \quad h(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n x^n.$$

si f est impaire, alors $f = h$, donc :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n x^n.$$

Le développement en série entière étant unique, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^{n+1} a_n = a_n.$$

Pour n pair, on a alors $-a_n = a_n$, c'est-à-dire $a_n = 0$. □

Proposition 3 *Soient $a > 0$, f une fonction définie sur $]-a;a[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral donne :*

$$\forall x \in]-a;a[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Pour que f soit développable en série entière en 0, il faut et il suffit qu'il existe $b \in]0;a]$ tel que :

$$\forall x \in]-b;b[, \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Preuve - Supposons que f soit développable en série entière en 0. Il existe alors une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un voisinage V de 0 inclus dans $]-a;a[$ tels que :

$$\forall x \in V \cap]-R;R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soit $b \in]0;a]$ tel que $]-b;b[\subset V \cap]-R;R[$. D'après la proposition 1, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Soit $x \in]-b;b[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c'est-à-dire

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe $b \in]0;a]$ tel que :

$$\forall x \in]-b;b[, \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in]-b;b[$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Donc $\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge vers $f(x)$ et ceci pour tout $x \in]-b;b[$. Le rayon R de $\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ vérifie $0 < b \leqslant R$ et donc f est développable en série entière en 0. □

3 Opérations sur les séries entières

3.1 Combinaison linéaire

Proposition 4 *Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, f et g deux applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ admettant pour développements en série entière respectifs $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$. Alors $f+\lambda g$ est développable en série entière en 0 et on a au voisinage de 0 :*

$$(f+\lambda g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) z^n.$$

Preuve - Notons R et R' les rayons de convergences respectifs de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$. f est développable en série entière en 0 donc $R > 0$ et il existe un voisinage V de 0 tel que :

$$\forall z \in V \cap B(0;R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} = a_n z^n.$$

g est développable en série entière en 0 donc $R' > 0$ et il existe un voisinage V' de 0 tel que :

$$\forall z \in V' \cap B(0;R'), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} = b_n z^n.$$

Le rayon R_1 de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (\lambda a_n + b_n) z^n$ est strictement positif car $R_1 \geqslant \min(R, R')$, $R > 0$ et $R' > 0$. Soit $V'' = V \cap V'$. V'' est un voisinage de 0 et on a :

$$\forall z \in V'' \cap B(0;R_1), \quad (\lambda f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) z^n.$$

(voir le chapitre sur les séries entières). □

3.2 Produit

Proposition 5 *Soient f et g deux applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ admettant pour développements en série entière respectifs $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$. Alors fg est développable en série entière en 0 et on a auvoisinage de 0 :*

$$(fg)(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Preuve - Reprenons les notations de la preuve de la proposition 4. Considérons la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$. Notons R_2 le rayon de convergence de cette série. $R_2 > 0$

car $R_2 \geqslant \min(R, R')$, $R > 0$ et $R' > 0$. On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_2$, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

c'est-à-dire

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{+_i nfty} c_n z^n.$$

fg est donc développable en série entière en 0, le développement étant donné ci-dessus. □

3.3 Dérivation

Proposition 6 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, développable en série entière en 0, dont le développement est $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Alors f' est développable en série entière en 0 et au voisinage de 0 :*

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}.$$

Preuve - Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.$R > 0$ et il existe un voisinage V de 0 tel que :

$$\forall x \in V \cap]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $V \cap]-R; R[$ (voir chapitre sur les séries entières). On sait par ailleurs que :

$$\forall x \in V \cap]-R; R[, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

donc

$$\forall x \in V \cap]-R; R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Le rayon de convergence de la série dérivée est $R > 0$ (voir chapitre sur les séries entières). Par conséquent, f' est développable en série entière en 0 et on a au voisinage de 0 :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

□

4 Développements usuels

4.1 Fonction exp

Le fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par $\exp(x) = e^x$. exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp^{(n)} = \exp$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exp^{(n)}(0) = 1.$$

Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t) dt.$$

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leqslant \max(1, e^x) \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right\| \leqslant \max(1, e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Comme $\max(1, e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il en est de même du reste intégral d'ordre n. D'après la proposition 1, on en déduit que exp est développable en série entière en 0 et au voisinage de 0 :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \frac{1}{n!}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

4.2 Fonctions sin et cos

cos et sin sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \end{cases}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2p+1 \\ (-1)^p \text{ si } n = 2p \end{cases}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2p \\ (-1)^p \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cos^{(n+1)}(t) dt.$$

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\cos^{(n+1)}(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{n!}\left|\int_0^x (x-t)^n dt\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Comme $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il en est de même du reste intégral d'ordre n. D'après la proposition 1, on en déduit que exp est développable en série entière en 0 et au voisinage de 0 :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right| = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes réels positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ converge absolument pour tout réel x. Le rayon de cette série entière est donc $+\infty$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

De même, on démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

4.3 Fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f_α définie sur $]-1;+\infty[$ par $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$. f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \quad f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{x}{1+x}f_\alpha(x).$$

f_α est donc solution sur $]-1;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(1+x)y' - xy = 0.$$

Supposons qu'il existe une fonction S développable en série entière en 0, solution de cette équation différentielle. Il existe alors une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un voisinage V de 0 tels que :

$$\forall x \in V \cap]-R;R[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]-a;a[\subset V \cap]-R;R[$. S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a;a[$ et on a :

$$\forall a \in]-a;a[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

S étant solution de l'équation différentielle, on a :

$$\forall x \in]-a;a[, \quad (1+x)S'(x) - \alpha S(x) = 0.$$

$$\begin{aligned}(1+x)S'(x)-\alpha S(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n\right)x^n\end{aligned}$$

S étant solution de l'équation différentielle, on a :

$$\forall x\in]-a;a[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n\right)x^n=0$$

Par unicité du développement en série entière en 0, sachant que S est solution de l'équation différentielle et qu'on doit avoir $S(0)=1$:

$$\begin{cases} a_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n=0\end{cases}$$

On démontre facilement par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ la série entière où :

$$a_0=1 \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est 1. Notons S la somme de cette série. On a alors :

$$\forall x\in]-1;1[,\quad S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et on vérifie sans peine que S est solution de l'équation différentielle. Par conséquent, f_α et S sont deux solutions de l'équation différentielle. Cette équation différentielle étant linéaire du premier ordre, l'ensemble des solutions est de la forme Kf_α, où $K\in\mathbb{R}$. Il existe donc $K_0\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x\in]-1;1[,\quad S(x)=K_0 f_\alpha(x)=K_0(1+x)^\alpha.$$

Sachant que $S(0)=1$, il en résulte que $S=f_\alpha$ sur $]-1;1[$ donc f_α est développable en série entière et on a :

$$\forall x\in]-1;1[,\quad (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

4.4 Fonction $x \mapsto \ln(1+x)$

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \quad f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}.$$

D'après le paragraphe précédent (avec $\alpha=-1$), on a :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f'(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n.$$

Soit S la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

On sait que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ ont le même rayon de convergence (voir le chapitre sur les séries entières, notamment le rayon de convergence d'une série entière et de sa série dérivée). S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=f'(x)$$

donc S et f diffèrent d'une constante. Il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x)=f(x)+c.$$

Comme $S(0)=0$ et $f(0)=0$, il en résulte que $c=0$. f est donc développable en série entière en 0 et on a :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

Remarque : Si $x=-1$, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ et la série est divergente. Si $x=1$, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ et la série converge d'après le critère des séries alternées (voir chapitre sur les séries à termes réels ou complexes). Donc :

$$\forall x \in]-1;1], \quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

En particulier,

$$\ln(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

4.5 Fractions rationnelles

Proposition 7 *Toute fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence du développement en série entière est égal au minimum des modules des pôles complexes.*

Preuve - Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On suppose que F n'admet pas 0 pour pôle. En effectuant la décomposition de F en éléments simples, on obtient des éléments de la forme $\frac{\lambda}{(z-z_0)^n}$, où $\lambda, z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < |z_0|$, on a :

$$\frac{\lambda}{(z-z_0)^n} = \frac{\lambda}{z_0^n} \frac{1}{\left(\frac{z}{z_0}-1\right)^n} = \frac{\lambda}{(-z_0)^n}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{-n}.$$

Pour $|z| < |z_0|$, on a $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ donc $z \mapsto \left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{-n}$ est développable en série entière (il en est de même pour $z \mapsto \frac{\lambda}{(z-z_0)^n}$). Le rayon de convergence du développement en série entière de $z \mapsto \frac{\lambda}{(z-z_0)^n}$ est $|z_0|$. Par conséquent, F est développable en série entière en 0 (somme de fonctions développables en séries entière en 0) et le rayon de convergence R du développement vérifie $R \geqslant \rho$, où ρ est le minimum des modules des pôles complexes de F).

Supposons maintenant que $R > \rho$. Il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$, pôle de la fraction rationnelle F tel que $|z_0| < R$. F est continues sur $B(0;R)$ donc en z_0, ce qui est impossible car $|F(z)| \xrightarrow[z \to z_0]{} +\infty$. □

Exemple : Considérons la fraction rationnelle suivante :

$$F : z \mapsto \frac{10z}{z^3 - 2z^2 + z - 2}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z-2)(z-i)(z+i)$. On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{2, i, -i\}, \quad F(z) = \frac{4}{z-2} + \frac{-2-i}{z-i} + \frac{-2+i}{z+i}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$:

$$\frac{4}{z-2} = \frac{4}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -2\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

$|z| < 1$:

$$\frac{-2-i}{z-i} = \frac{-2-i}{-i(1+iz)} = (1-2i)(1+iz)^{-1} = (1-2i)\sum_{n=0}^{+\infty}(-iz)^n.$$

$$\frac{-2+i}{z+i} = \frac{-2+i}{i(1-iz)} = (1+2i)(1-iz)^{-1} = (1+2i)\sum_{n=0}^{+\infty}(iz)^n.$$

Donc pour $|z| < 1$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ avec } a_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + (1-2i)(-i)^n + (1+2i)i^n.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est 1.